Sau đây là trích đoạn từ bản thảo của cuốn sách:

10 BÀI TOÁN TRỌNG ĐIỂM
TƯ DUY ĐỘT PHÁ – CHÌA KHÓA GIẢI NHANH
HÌNH HỌC PHẲNG OXY

Mọi thông tin chi tiết các bạn có thể tham khảo qua:

Web: http://www.toanmath.com/

LỜI MỞ ĐẦU

Có lẽ thị trường sách tham khảo chưa bao giờ "phát triển" như hiện nay. Bởi với bạn đọc, để tìm một cuốn sách về một chủ đề nào đó lại gặp rất nhiều khó khăn. Không phải bởi sự khan hiếm, mà bạn đọc đứng trước quá nhiều sự lựa chọn. Khi cầm trên tay cuốn sách này, chắc chắn bạn cũng đang băn khoăn liệu đây có phải là cuốn sách phù hợp dành cho bạn. Nếu chỉ đọc một vài trang đầu, chắc chắn bạn sẽ chưa cảm nhận hết được cách viết và ý tưởng mà tác giả muốn gửi gắm thông qua cuốn sách này .

Bạn có thể hình dung ý tưởng của việc giải toán, giống như bạn phải tìm đúng con đường để về đích và chọn một con đường ngắn nhất luôn là điều chúng ta muốn hướng tới. Để làm tốt được điều này, trên hành trình tìm ra đích đến, chúng ta thường nhớ tới các mốc, những địa điểm dễ nhớ gắn liền với đích đến. Và trong cuốn sách này tác giả thiết kế dựa trên ý tưởng đó, bằng cách tạo ra những "điểm mốc" thông qua 10 bài toán gốc. Trên con đường để tìm đến "đáp số" các bạn sẽ cần những bài toán này. Nghĩa là khi nhìn thấy chúng, bạn đã biết cách để tìm ra được lời giải cho các bài toán. Đây là 10 bài toán quan trọng, là "linh hồn" để tạo ra các bài toán khác. Có thể sẽ có rất nhiều bạn sẽ ngạc nhiên khi đọc nội dung các bài toán gốc, vì thực ra nó khá đơn giản. Nhưng các bạn có biết rằng, ý tưởng được lấy từ các bài toán này chính là "nguồn cảm hứng" cho các câu hỏi xuất hiện trong đề thi quốc gia. Chúng gần như giải quyết hầu hết các bài toán thi Đại Học trong các năm vừa qua và tác giả tin nó sẽ có giá trị rất nhiều trong các kì thi Quốc Gia sắp tới. Mong rằng với cách tiếp cận hoàn toàn mới này sẽ giúp bạn đọc thấy thích thú và việc chinh phục các câu hỏi liên quan đến hình học phẳng Oxy không còn là vấn đề lớn đối với các bạn. Cũng hi vọng cuốn sách sẽ giúp ích cho các bạn học sinh trong quá trình học tập, ôn thi một cách chủ động, tự tin bước vào kì thi Quốc Gia và là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô trong quá trình giảng dạy.

Trong cuốn sách này tác giả giới thiệu tới các bạn 5 phần:

PHẦN 1: TỔNG HỢP KIẾN THỨC CƠ BẢN
PHẦN 2: NHỮNG BÀI TOÁN CƠ BẢN
PHẦN 3: 10 BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG OXY
PHẦN 4: SÁNG TẠO VÀ PHÁT TRIỂN TỪ CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG THUẦN TÚY
PHẦN 5: BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN

Mặc dù rất nghiêm túc trong quá trình biên soạn, song chắc chắn sẽ không tránh khỏi những sai xót và khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự phản hồi, góp ý và xây dựng từ phía bạn đọc, để cuốn sách được hoàn thiện hơn cho những lần tái bản sau.

Mọi ý kiến đóng góp mong được gửi về địa chỉ:

Nguyễn Thanh Tùng
Số 9 – Ngõ 880 – Bạch Đằng – Hai Bà Trưng – Hà Nội
hoặc theo e-mail: giaidaptoancap3@yahoo.com

Trân trọng cảm ơn !
Tác giả

PHẦN 3: 10 BÀI TOÁN HÌNH HỌC OXY

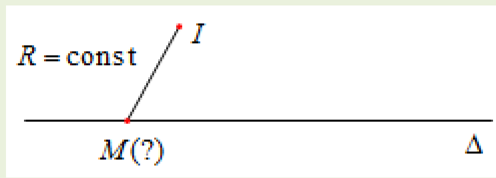
1. BÀI TOÁN 1

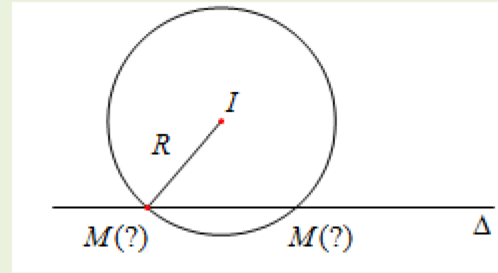
A. NỘI DUNG BÀI TOÁN 1

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ đã biết phương trình và cách điểm I cho trước một khoảng không đổi R ($MI = R = \text{const}$).

B. CÁCH GIẢI CHUNG

Có thể trình bày lời giải bài toán này theo 2 cách (bản chất là một).





***C1**: Gọi $M(t) \in \Delta \xrightarrow{MI = R} f(t) = 0 \Leftrightarrow t = ? \Rightarrow M$*

***C2**: Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ : $\begin{cases} \Delta \\ (C) \end{cases}$*

(ở đây (C) là đường tròn tâm I bán kính R)

<u>**GIẢI THÍCH CHI TIẾT**</u> :

*Nghĩa là khi gặp bài toán có nội dung như **Bài toán 1** thì ta có thể tìm điểm theo 2 cách trình bày sau:*

1) <u>Cách 1</u> (C1):

****)** Do M thuộc đường thẳng Δ đã biết phương trình nên ta sẽ tham số hóa điểm M theo ẩn t. Cụ thể nếu đề bài cho đường thẳng Δ dưới dạng :*

***+)** Tham số : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ hoặc chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ thì ta sẽ gọi $M(x_0 + at; y_0 + bt)$*

Ví như: M thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ thì ta sẽ gọi $M(1 - t; -2 + 3t)$

***+)** Tổng quát $ax + by + c = 0$, khi đó để việc gọi điểm M đơn giản và tránh tọa độ viết dưới dạng phân số ta nên gọi như sau:*

Nếu $a = 1$ hay $\Delta: x + by + c = 0$ thì ta gọi $M(-c - bt; t)$. Ví như $\Delta: x + 3y - 5 = 0$ thì gọi $M(5 - 3t; t)$.

Nếu $b = 1$ hay $\Delta: ax + y + c = 0$ thì ta gọi $M(t; -c - at)$. Ví như $\Delta: 2x - y + 1 = 0$ thì gọi $M(t; 1 + 2t)$.

(với $a = -1$ hoặc $b = -1$ ta làm tương tự)

Nếu $\begin{cases} a \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$ *(ở đây* $(a,b,c)=1$*) thì ta chuyển về dạng tham số để gọi* M *.*

Ví như $\Delta: 2x-3y-3=0$ *(* $\overrightarrow{u_\Delta}=(3;2)$*,* Δ *đi qua* $M_0(0;-1)$ *)* $\Rightarrow \Delta: \begin{cases} x=3t \\ y=-1+2t \end{cases} \Rightarrow M(3t;-1+2t)$

(Đây là chỉ là những "tiểu tiết" nhỏ - song nếu tạo cho mình một thói quen thì việc tính toán sẽ giảm nhẹ và hạn chế khả năng sai xót trong các bước tính toán).

***)** *Khi đó việc sử dụng dữ kiện* $MI = R$ *sẽ giúp ta thiết lập được một phương trình chứa* t *(* $f(t)=0$*), từ đây giải phương trình tìm* t *và suy ra được tọa độ điểm* M *.*

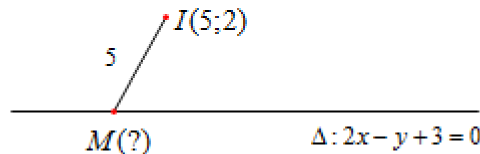
2) <u>Cách 2</u> (C2):

Do $MI = R$ *nên* M *thuộc đường tròn* (C) *tâm* I*, bán kính* R *. Khi đó tọa độ điểm* M *chính là nghiệm của hệ phương trình (một phương trình* Δ *và một phương trình đường tròn* (C)*) :* $\begin{cases} \Delta \\ (C) \end{cases}$

C. VÍ DỤ GỐC

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $I(5;2)$ và đường thẳng $\Delta: 2x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MI=5$.

***<u>Bài giải</u>*:**



<u>Cách 1</u>: +) Vì $M \in \Delta$ nên gọi $M(t;2t+3)$

+) Ta có $MI=5 \Leftrightarrow MI^2=25 \Leftrightarrow (t-5)^2+(2t+1)^2=25 \Leftrightarrow 5t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;5) \\ M\left(\frac{1}{5};\frac{17}{5}\right) \end{array}\right.$

<u>Cách 2</u>: +) Có: $MI=5$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm I và $R=5$ có phương trình: $(x-5)^2+(y-2)^2=25$

+) $M \in \Delta$ nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ (x-5)^2+(y-2)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{17}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;5) \\ M\left(\frac{1}{5};\frac{17}{5}\right) \end{array}\right.$

Nhận xét:

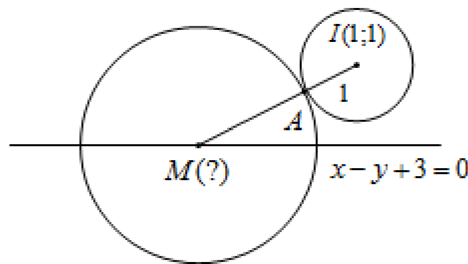
) Với **C1 chúng ta không cần quan tâm tới bài toán về sự tương giao giữa đường thẳng và đường tròn (đề cập ở **C2**) và giải theo phương pháp đại số thông thường.*
) Với **C2 ta thấy rõ hơn bản chất của bài toán (điểm cần tìm là giao của đường thẳng và đường tròn).*
) **C1 và **C2** là hai cách trình bày khác nhau của cùng một phương pháp thế trong giải hệ phương trình.*
**) Nếu tìm được duy nhất một điểm M khi đó $IM \perp \Delta$ (hay đường tròn $(I;R)$ tiếp xúc với Δ tại M).*
) Tùy vào dữ kiện của bài toán, có thể linh hoạt trình bày theo **C1 hoặc **C2** (**C2** "mạnh" hơn **C1** khi đề cập tới những điểm có cùng vai trò – các bạn sẽ thấy rõ điều này qua các ví dụ minh họa ở phần sau).*

D. CÁC VÍ DỤ MỞ RỘNG

Như vậy để chuyển các bài toán về **Bài toán 1**, ta cần chỉ ra được được 2 điều :
+) **Điểm cần tìm** đang **thuộc một đường thẳng** đã biết phương trình.
+) Điểm cần tìm **cách một điểm** đã biết tọa độ **một khoảng không đổi**.
Vì vậy để có được điều này các bạn cần trả lời các câu hỏi:
Chùm câu hỏi 1: Điểm cần tìm thuộc đường nào ? Đường đó đã biết phương trình chưa? Nếu chưa thì có viết được không? Viết bằng cách nào?
Chùm câu hỏi 2: Điểm cần tìm cách một điểm cho trước (đã biết tọa độ) một khoảng bằng bao nhiêu ? Cắt nghĩa dữ kiện của bài toán như thế nào để tính được khoảng cách đó?
Và các hỏi trên được "thiết kế" qua các cách ra đề sau:

1. CÁCH RA ĐỀ 1: *Cho biết M thuộc đường thẳng Δ và điểm I cho trước, độ dài IM đề bài không cho luôn. Cần "cắt nghĩa" các dữ kiện của bài toán để tính độ dài đoạn IM*

Ví dụ 1 (D – 2006). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng $d: x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).



Phân tích : *) $M \in d: x - y + 3 = 0$

*) $(C): \begin{cases} I(1;1) \\ R = 1 \end{cases}$ *và khai thác dữ kiện suy ra* $MI = 3R = 3$ $\rightarrow$ *chuyển về* ***Bài toán 1.***

Giải :

+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 1$

+) Gọi A là điểm tiếp xúc ngoài của đường tròn tâm M và đường tròn (C).

Suy ra : $MI = MA + AI = 2R + R = 3R = 3$

+) Gọi $M(t; t+3) \in d$

Khi đó $MI = 3 \Leftrightarrow MI^2 = 9 \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;4) \\ M(-2;1) \end{array}\right.$

+) Vậy $M(1;4)$ hoặc $M(-2;1)$.

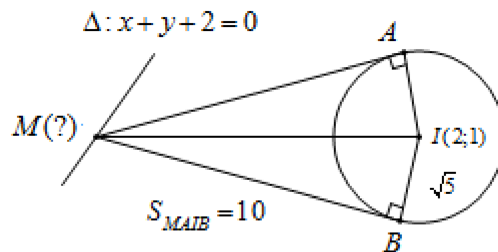
Ví dụ 2 (A – 2011). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Phân tích:

*) $M \in d: x - y + 3 = 0$

*) $S_{MAIB} = 2S_{MBI} = BI.MB = \sqrt{5}.MB = 10 \Rightarrow MB = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = 5 \rightarrow$ *chuyển về* ***Bài toán 1.***

Giải :



+) Ta có $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(2;1) \\ R = IB = \sqrt{5} \end{cases}$

+) Vì MA và MB là các tiếp tuyến (A và B là các tiếp điểm)

$\Rightarrow S_{MAIB} = 2S_{MBI} = IB.MB = \sqrt{5}.MB = 10 \Rightarrow MB = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{MB^2 + IB^2} = 5$

+) Gọi $M(t; -t-2) \in \Delta$

+) Khi đó $MI = 5 \Leftrightarrow MI^2 = 25 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-t-3)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(2;-4) \\ M(-3;1) \end{array}\right.$

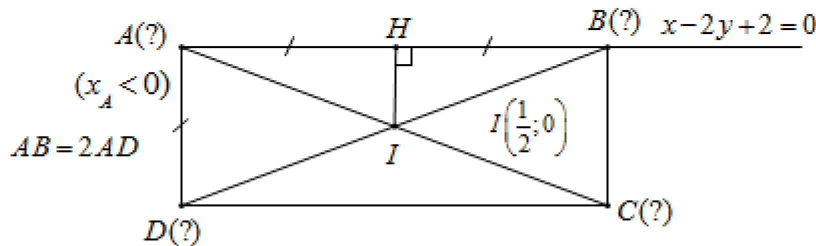
Ví dụ 3 (B – 2002). Cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D biết rằng A có hoành độ âm.

Phân tích hướng giải:

*) Có $A\in AB: x-2y+2=0$

*) $AD=2d(I,AB)\to AB=?\to AI=?\to$ *chuyển về* **Bài toán 1** $\to$ *tọa độ điểm* $A\to$ *tọa độ* B,C,D.

Giải :



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB. Khi đó $IH=d(I,AB)=\dfrac{\left|\frac{1}{2}+2\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $AH=\dfrac{AB}{2}=AD=2IH=\sqrt{5}\Rightarrow IB=IA=\sqrt{IH^2+AH^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}+5}=\dfrac{5}{2}$

Do đó A,B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tròn tâm I, bán kính $R=\dfrac{5}{2}$.

Vậy tọa độ A,B là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x-2y+2=0\\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

Suy ra $A(-2;0),B(2,2)$ (Vì $x_A<0$)

Mặt khác I là trung điểm của AC và BD nên suy ra $C(3;0),D(-1;-2)$

Vậy $A(-2;0),B(2,2),C(3;0),D(-1;-2)$.

Nhận xét :

Khi bài toán yêu cầu tìm từ hai điểm trở lên, mà các điểm có vai trò như nhau (trong bài trên A,B có vài trò như nhau) thì các bạn nên trình bày theo ***C2*** *để từ điểm này ta suy ra được điểm kia.*

Ví dụ 4 (B – 2009 – NC). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B,C thuộc đường thẳng $\Delta: x-y-4=0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Phân tích hướng giải:

*) *Có* $B,C\in\Delta: x-y-4=0$

*) $S_{ABC}=18\Rightarrow BC=\dfrac{2S_{ABC}}{d(A,\Delta)}\Rightarrow BH\Rightarrow AB=AC=\sqrt{AH^2+BH^2}\rightarrow$ *chuyển về* **Bài toán 1**

Giải :

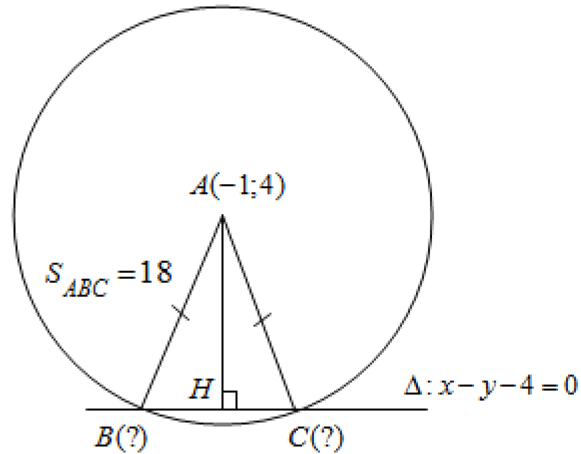
+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ

Khi đó H là trung điểm của BC và :

$$AH=d(A,\Delta)=\frac{|-1-4-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{2S_{ABC}}{AH}=\frac{2.18}{\frac{9}{\sqrt{2}}}=4\sqrt{2}\Rightarrow BH=CH=2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{\frac{81}{2}+8}=\sqrt{\frac{97}{2}}$$



+) Vậy $AB=AC=\sqrt{\frac{97}{2}}$, suy ra B,C thuộc đường tròn tâm $A(-1;4)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{97}{2}}$ có phương trình : $(x+1)^2+(y-4)^2=\frac{97}{2}$

+) Khi đó tọa độ B,C là nghiệm của hệ : $\begin{cases}x-y-4=0\\(x+1)^2+(y-4)^2=\frac{97}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-4\\4x^2-28x+33=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=-\frac{5}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\frac{11}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}.$$

+) Vậy $B\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right),C\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right)$ hoặc $B\left(\frac{11}{2};\frac{3}{2}\right),C\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$, có BD nằm trên đường thẳng có phương trình $x+y-3=0$, điểm $M(-1;2)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N(2;-2)$ thuộc đường thẳng AD. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết điểm B có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

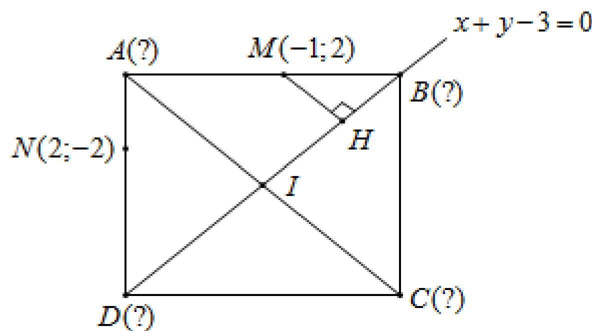
*) *Trong các dữ kiện của bài toán ta nhận thấy điểm có "lợi" để ta khai thác đầu tiên chính là điểm B, bởi B thuộc BD đã biết phương trình và B có hoành độ dương.*

) Ta đã biết tọa độ hai điểm $M(-1;2)$ và $N(2;-2)$ nên nếu tính được độ dài đoạn BM hoặc BN ta sẽ tìm ra được tọa độ điểm B nhờ **Bài toán 1. Nghĩa là ta đang cần yếu tố về định lượng, điều này gợi ý ta đi tính $d(M,BD)$ hoặc $d(N,BD)$. Trong hai đại lượng này , đại lượng $d(M,BD)$ sẽ giúp ta dễ dàng tìm được độ dài BM (do $\widehat{MBH}=90^0$), từ đó "tháo" được điểm B theo góc nhìn của **Bài toán 1**.*

**) Khi tìm được tọa độ điểm B ta sẽ tìm được tọa độ các điểm còn lại nhờ viết được phương trình AB, AD và tính chất trung điểm của hai đường chéo.*

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải:



+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $BD \Rightarrow MH = d(M,BD) = \dfrac{|-1+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

Do MHB là tam giác vuông cân tại $H \Rightarrow BM = \sqrt{2}MH = 2$

+) Gọi $B(t;3-t)$ với $t>0$, khi đó :

$BM^2 = 4 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 4 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t=-1$ (loại) $\Rightarrow B(1;2)$

+) AB đi qua B và M nên có phương trình $y=2$

AD đi qua N và vuông góc với AB nên có phương trình $x=2$

Suy ra $A(2;2)$

+) Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=2 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow D(2;1)$

Gọi I là trung điểm của $BD \Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow C(1;1)$ (do I là trung điểm của AC)

(Có thể tìm C qua hệ thức $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$)

Vậy $A(2;2), B(1;2), C(1;1), D(2;1)$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, có $AB = AD < CD$, điểm $B(1;2)$, đường thẳng BD có phương trình $y=2$. Biết đường thẳng $\Delta: 7x - y - 25 = 0$ cắt các đoạn thẳng AD, CD lần lượt tại hai điểm M, N sao cho BM vuông góc với BC và tia BN là tia phân giác trong của $\widehat{MBC}$. Tìm tọa độ điểm D biết D có hoành độ dương.

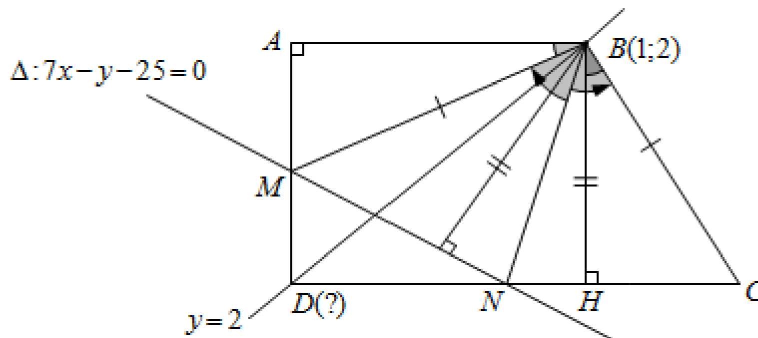
Phân tích hướng giải :

) Với dữ kiện bài toán ta có $D \in BD: y = 2$ và điểm $B(1;2)$, nên nếu tính được độ dài đoạn BD ta sẽ nhìn thấy luôn **Bài toán 1 và việc tìm ra điểm D không có gì là khó khăn. Nghĩa là ta đang cần có yếu tố về "định lượng". Lúc này đường thẳng Δ đã biết phương trình nên ta nghĩ tới việc tính khoảng cách từ B tới Δ và tạo mối liên hệ gắn kết với độ dài BD.*

**) Với dữ kiện còn lại của bài toán và bằng phương pháp hình học thuần túy ta dễ dàng chỉ ra được $BH = d(B,CD) = d(B,\Delta)$, khi đó ta sẽ tính được độ dài BD và đưa ra lời giải đầy đủ cho bài toán.*

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải:



+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên CD, khi đó $ABHD$ là hình vuông

Suy ra $\widehat{CBH} = \widehat{MBA}$ (hai góc cùng phụ với $\widehat{MBH}$)

Từ đây ta có được $\Delta CBH = \Delta MBA$ (g.c.g) $\Rightarrow CB = MB \Rightarrow \Delta CBN = \Delta MBN$ (c.g.c)

Khi đó $BH = d(B,CN) = d(B,MN) = \dfrac{|7-2-25|}{\sqrt{50}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

Mà tam giác DHB vuông cân tại H nên $BD = \sqrt{2}BH = 4$

+) Gọi $D(t;2) \in BD$ với $t > 0$, khi đó:

$BD^2 = 16 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 16 \Leftrightarrow t = 5$ hoặc $t = -3$ (loại) $\Rightarrow D(5;2)$

Vậy $D(5;2)$.

Ví dụ 7 (A, A1 – 2012 – CB). Cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC, N* là điểm trên cạnh *CD* sao cho *CN* = 2*ND*. Giả sử $M\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm *A*.

Phân tích hướng giải :

**) $A \in AN: 2x - y - 3 = 0$*

) Điểm M biết tọa độ nên nếu tính được đoạn AM thì coi như điểm A sẽ "tháo" được nhờ **Bài toán 1. Lúc này ta sẽ gắn AM vào tam giác vuông AMH với cạnh $MH = d(M, AN)$ ta dễ dàng tính được. Như vậy nếu biết thêm một yếu tố về cạnh hoặc về góc trong tam giác vuông này thì ta sẽ tính được độ dài AM. Do các*

cạnh của tam giác AMH đều có thể biểu diễn thông độ dài cạnh hình vuông nên ta sẽ nghĩ ngay tới việc tính góc A nhờ định lí cosin trong tam giác. Do đó ta sẽ có lời giải cụ thể như sau :

Giải:

A(?) B M($\frac{11}{2};\frac{1}{2}$) H D N C $2x-y-3=0$

+) Gọi H là hình chiếu của M lên AN

$$\Rightarrow MH = d(M,AN) = \frac{\left|2.\frac{11}{2}-\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Đặt $AB = 6a \Rightarrow \begin{cases} ND = 2a; \quad NC = 4a \\ MB = MC = 3a \end{cases}$

(vì $ABCD$ là hình vuông và $CN = 2ND$)

(Các bạn có thể đặt $AB = a$, ở đây ta đặt $AB = 6a$ để việc biểu diễn các độ dài khác được đơn giản)

Khi đó áp dụng Pitago ta được: $AM = 3\sqrt{5}a; MN = 5a$ và $AN = 2\sqrt{10}a$

Trong ΔAMN ta có: $\cos\angle MAN = \frac{AM^2+AN^2-MN^2}{2AM.AN} = \frac{45a^2+40a^2-25a^2}{2.3\sqrt{5}a.2\sqrt{10}a} = \frac{60a^2}{60\sqrt{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \angle MAN = 45^0 \Rightarrow \Delta MAH$ cận tại $H \Rightarrow AM = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}.\frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ (*)

+) Gọi $A(t;2t-3) \in AN$

+) Ta có $AM^2 = \frac{45}{2}$ (theo (*)) $\Leftrightarrow \left(t-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(2t-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow t^2-5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;-1) \\ A(4;5) \end{array}\right.$.

+) Vậy $A(1;-1)$ hoặc $A(4;5)$.

Nhận xét:

*) *Khi muốn chuyển việc tìm điểm về* ***Bài toán 1*** *mà yếu tố độ dài MI chưa biết (trong bài toán này AM chưa biết) thì thường ta hay "cắt nghĩa" thông qua dữ kiện về định lượng. Nếu không có điều này thì trong đề bài thường ẩn chứa những yếu tố bất biến như góc (ví như trong bài toán này góc $\widehat{MAH}$ ta luôn tính được), khoảng cách (trong ví dụ này $d(M,AN)$ cũng là một đại lượng không đổi)…Từ đây việc tìm độ dài MI (trong bài toán trên là AM) sẽ khá đơn giản và bài toán gốc sẽ xuất hiện đúng như nội dung của* ***Bài toán 1****.*

*) *Ngoài cách tìm ra được $AM = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ như ở ví dụ trên, các bạn có thể tham khảo việc tìm AM theo cách sau:* Đặt $AB = a \Rightarrow S_{AMN} = S_{ABCD} - \left(S_{ADN}+S_{CNM}+S_{BAM}\right) = \frac{5a^2}{12}$ và $AN = \frac{a\sqrt{10}}{3}$

Khi đó: $d(M,AN) = \frac{2S_{AMN}}{AN} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{2.\frac{5a^2}{12}}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x+y+5=0$, $\Delta_2: x-2y-3=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+10y+9=0$. Gọi M là một điểm thuộc đường tròn (C) và N là điểm thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho M và N đối xứng nhau qua Δ_2. Tìm tọa độ điểm N .

***Phân tích* :**

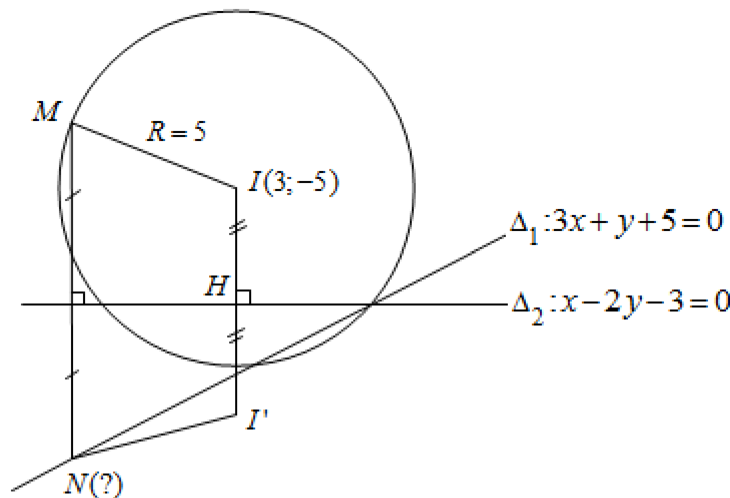
Điểm N thuộc đường thẳng Δ_1 đã biết phương trình, do đó để tìm tọa độ điểm N ta cần thêm một yếu tố liên quan tới N . Lúc này ta sẽ quan tâm tới các điểm đã biết tọa độ trong dữ kiện của bài toán. Ở đây đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$, nếu tính được độ dài NI ta chuyển luôn được về ***Bài toán 1****. Song bài toán này việc tìm NI sẽ khá phức tạp. Vì vậy sẽ cần một điểm khác mà việc tính khoảng cách từ N tới điểm đó đơn giản. Trong bài toán có chứa yếu tố đối xứng (M và N đối xứng nhau qua Δ_2), điều đó khiến ta nghĩ tới điểm I' đối xứng với I qua Δ_2. Và điểm này hoàn toàn xác định được, từ đây suy ra được $NI' = IM = R = 5$. Như vậy lúc này ta đã nhìn thấy* ***Bài toán 1*** *để tìm tọa độ điểm N . Cụ thể :*

***)** $N \in \Delta_1: 3x+y+5=0$

***)** *N cách điểm I' đã biết tọa độ một khoảng $NI' = 5$.*

(Thực ra ở chương trình lớp 11 các bạn được học phép đối xứng trục và khi đó ta sẽ trả lời được câu hỏi vì sao lại đi xác định thêm điểm I' như thế – song ở cách giải dưới đây tác giả đã trình bày theo cách mà để ngay cả các bạn học lớp 10 cũng có thể hiểu được).

***Giải* :**



+) Đường tròn (C) có tâm $I(3;-5)$ và bán kính $R=5$.

+) Gọi I' là điểm đối xứng với I qua Δ_2, suy ra II' đi qua I và vuông góc với Δ_2 nên có phương trình : $2x+y-1=0$

Gọi $II' \cap \Delta_2 = \{H\}$, khi đó tọa độ điểm H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow H(1;-1) \Rightarrow I'(-1;3) \text{ (vì } H \text{ là trung điểm của } II'\text{)}$$

+) Gọi $N(t;-3t-5)\in\Delta_1$, khi đó do N, I' lần lượt là hai điểm đối xứng của M, I qua Δ_2 nên :

$$NI' = IM = R = 5 \Leftrightarrow NI'^2 = 25 \Leftrightarrow (t+1)^2+(3t+8)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2+5t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} N(-1;-2) \\ N(-4;7) \end{array}\right.$$

+) Vậy $N(-1;-2)$ hoặc $N(-4;7)$.

Nhận xét :

*Khi đi tìm tọa độ của một điểm nghĩa là bài toán đang chứa hai ẩn (tung độ và hoành độ của điểm đó), vì vậy việc giải những lớp bài toán như thế này thực chất là việc chúng ta đi cắt nghĩa số liệu của bài toán để được hai phương trình (hai dấu "="). Dữ kiện điểm thuộc đường luôn giúp ta có được một phương trình và các dữ kiện chưa khai thác sẽ giúp ta cắt nghĩa để tìm thêm một dấu "=" còn lại. Kinh nghiệm làm những bài toán tìm điểm cho ta biết được xác suất rơi vào **Bài toán 1** thường khá cao (có lẽ đó cũng là ý đồ và lí do để tác giả giới thiệu **Bài toán 1** đầu tiên tới các bạn) . Vì vậy trong các ví dụ cụ thể, nếu điểm đã thuộc một đường thẳng cho trước thì hướng tư duy đầu tiên ta ưu tiên nghĩ tới là chỉ ra một điểm cố định và khoảng cách từ điểm cần tìm tới điểm đó xác định được.*

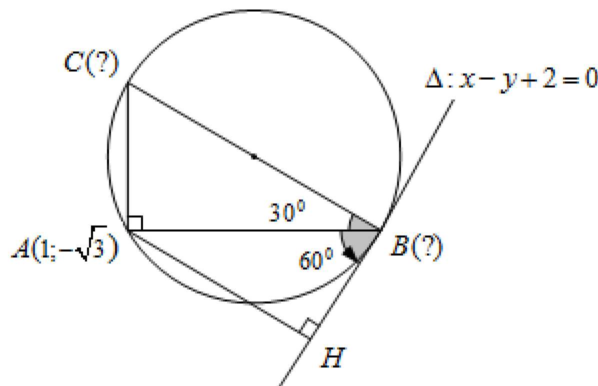
Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC vuông tại $A(1;-\sqrt{3})$ có góc $\widehat{ABC}=30^0$, đường thẳng $\Delta: x-y+2=0$ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết B có hoành độ là một số hữu tỉ.

Phân tích hướng giải :

) Ở đây B đang thuộc đường thẳng Δ và A là điểm đã biết tọa độ do đó nếu tính được độ dài đoạn AB ta sẽ chuyển được về **Bài toán 1. Lúc này ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện của bài toán để làm điều này (các bạn xem việc cắt nghĩa ở phần lời giải chi tiết).*

**) Khi đã tìm được điểm B ta dễ dàng viết được phương trình của BC và AC và suy ra tọa độ điểm C.*

Giải :



+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d, suy ra $AH = d(A,\Delta) = \dfrac{|1+\sqrt{3}+2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Tam giác ABC vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhận BC là đường kính

Mặt khác: Δ là tiếp tuyến tại B của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $\Delta\perp BC$.

Khi đó : $\widehat{ABH} = 60^0$ và xét tam giác vuông AHB ta có: $AB = \dfrac{AH}{\sin 60^0} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

+) Gọi $B(t;t+2)$ với $t \in \mathbb{Q}$, khi đó : $AB^2 = 8+4\sqrt{3} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2+\sqrt{3})^2 = 8+4\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow t^2 + (1+\sqrt{3})t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -1-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \text{ (loại)}$$

Suy ra $B(0;2)$.

+) Khi đó BC đi qua $B(0;2)$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{BC}} = \overrightarrow{u_\Delta} = (1;1)$ nên có phương trình: $x+y-2=0$

AC đi qua $A(1;-\sqrt{3})$, có $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{BA} = (1;-2-\sqrt{3})$ có phương trình: $x-(2+\sqrt{3})y-4-2\sqrt{3}=0$

+) Vì $BC \cap AC = \{C\}$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-(2+\sqrt{3})y-4-2\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow C\left(2+\dfrac{2}{\sqrt{3}};-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

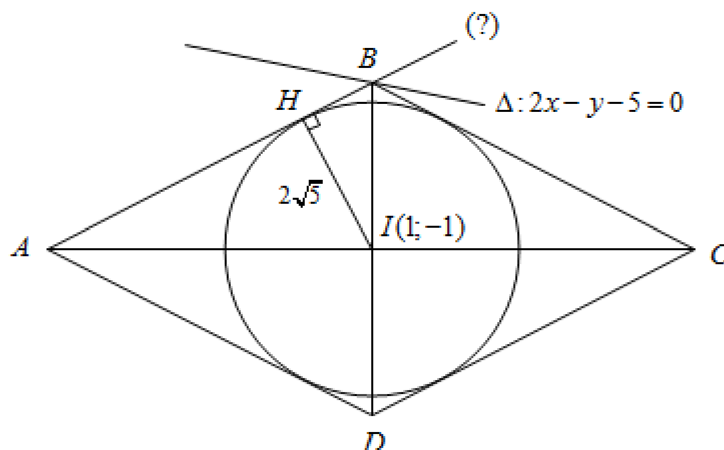
Ví dụ 10. Cho hình thoi $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+2y-18=0$. Biết $AC = 2BD$, điểm B có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $\Delta: 2x-y-5=0$. Viết phương trình cạnh AB.

Phân tích hướng giải **:**

) Ở đây B đang thuộc đường thẳng Δ và I là tâm của đường tròn (C) đã biết tọa độ do đó nếu tính được độ dài đoạn BI ta sẽ chuyển được về* **Bài toán 1. *Lúc này ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện của bài toán để làm điều này (các bạn xem việc cắt nghĩa ở lời giải).*

) Khi đã tìm được điểm B ta chuyển về bài toán viết phương trình đường thẳng AB đi qua điểm B đã biết tọa độ và cách điểm I cho trước một khoảng không đổi R nghĩa là ta chuyển bài toán về* ***Bài toán 6 (Các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ bài Bài toán 6 ở phần sau).*

Giải **:**



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$

Gọi H là hình chiếu của I trên AB, suy ra $IH=R=2\sqrt{5}$

Vì $ABCD$ là hình thoi và $AC=2BD$ nên $AI=2BI$, khi đó xét tam giác vuông ABI ta có :

$$\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{IH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{4BI^2}+\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{(2\sqrt{5})^2}\Leftrightarrow BI=5$$

+) Gọi $B(t;2t-5)\in\Delta$ với $t>0$, khi đó : $BI=5\Leftrightarrow BI^2=25\Leftrightarrow(t-1)^2+(2t-4)^2=25$

$$\Leftrightarrow 5t^2-18t-8=0\Leftrightarrow t=4 \text{ hoặc } t=-\frac{2}{5}\text{ (loại)}\Rightarrow B(4;3)$$

+) Gọi véctơ pháp tuyến của AB là $\overrightarrow{n_{AB}}=(a;b)$ với $a^2+b^2>0$, khi đó phương trình AB có dạng :

$$a(x-4)+b(y-3)=0\Leftrightarrow ax+by-4a-3b=0$$

Ta có : $d(I,AB)=R\Leftrightarrow\dfrac{|a-b-4a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow(3a+4b)^2=20(a^2+b^2)$

$$\Leftrightarrow 11a^2-24ab+4b^2=0\Leftrightarrow 11\left(\frac{a}{b}\right)^2-24\left(\frac{a}{b}\right)+4=0\Leftrightarrow\frac{a}{b}=2\text{ hoặc }\frac{a}{b}=\frac{2}{11}$$

+) Với $\frac{a}{b}=2$ chọn $\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$, khi đó phương trình AB là : $2x+y-11=0$

Với $\frac{a}{b}=\frac{2}{11}$ chọn $\begin{cases}a=2\\b=11\end{cases}$, khi đó phương trình AB là : $2x+11y-41=0$

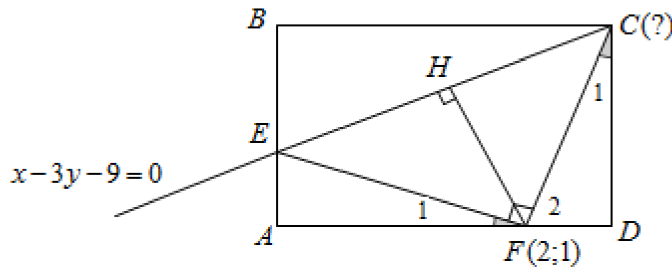
Ví dụ 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ có E,F lần lượt thuộc các đoạn AB,AD sao cho $EB=2EA$, $FA=3FD$, $F(2;1)$ và tam giác CEF vuông tại F. Biết rằng đường thẳng $x-3y-9=0$ đi qua hai điểm C,E. Tìm tọa độ điểm C, biết C có hoành độ dương.

***Phân tích hướng giải*:**

*) *$C\in CE$ đã biết phương trình và $F(2;1)$. Điều đó gợi ý ta đi tính độ dài CF, nếu làm được điều này ta sẽ dễ dàng có được đáp số theo góc nhìn của* ***Bài toán 1****.*

*) *Với dữ kiện $EB=2EA$, $FA=3FD$ và tam giác CEF vuông tại F ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa hai cạnh của hình chữ nhật. Song ta vẫn đang thiếu một yếu tố về định lượng. Nếu trong đề bài không cho thì ta sẽ nghĩ ngay tới việc đi tính $d(F,CE)$ (yếu tố ẩn trong bài toán) Thông số này sẽ giúp ta có được độ dài đoạn CF. Do đó ta đi đến lời giải chi tiết sau:*

Giải :



+) Ta có $\widehat{F_1} = \widehat{C_1}$ (vì cùng phụ với $\widehat{F_2}$) và $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^0$, suy ra $\Delta AEF \sim \Delta DFC \Rightarrow \dfrac{AE}{DF} = \dfrac{AF}{DC} = \dfrac{EF}{FC}$

Mà $\begin{cases} EB = 2EA \\ FA = 3FD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = \dfrac{1}{3}AB \\ DF = \dfrac{1}{4}AD; \quad AF = \dfrac{3}{4}AD \end{cases}$, suy ra $\dfrac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{4}AD} = \dfrac{\frac{3}{4}AD}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = \dfrac{9}{16}AD^2 \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{3}{4}$

Do đó $\dfrac{EF}{FC} = \dfrac{AE}{DF} = \dfrac{\frac{1}{3}AB}{\frac{1}{4}AD} = 1 \Rightarrow EF = FC$, suy ra ΔFEC vuông cân tại F

+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên EC . Khi đó :

$$CF = \sqrt{2}FH = \sqrt{2}.d(F,CE) = \sqrt{2}.\frac{|2-3-9|}{\sqrt{1^2+3^2}} = 2\sqrt{5}$$

+) Gọi $C(3t+9;t)$ với $t > -3$ (do $x_C > 0$) . Suy ra:

$$CF^2 = 20 \Leftrightarrow (3t+7)^2 + (t-1)^2 = 20 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = -3 \text{ (loại)} \Rightarrow C(6;-1)$$

+) Vậy $C(6;-1)$.

Nhận xét:

Ở ví dụ trên việc tìm điểm C theo góc nhìn của ***Bài toán 1*** *là khá "tự nhiên" khi C đang thuộc một đường thẳng biết phương trình và điểm $F(2;1)$ cố định. Song nếu câu hỏi bài toán không chỉ dừng lại ở việc tìm điểm C mà phải đi tìm tất cả các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ ta vẫn hoàn toàn có thể giải quyết triệt để bài toán. Cụ thể:*

+) Khi tìm được điểm C ta sẽ viết được phương trình EF (đi qua F và vuông góc với CF)
và suy ra được tọa độ điểm E (với $CE \cap EF = \{E\}$)

+) Việc chỉ ra $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{3}{4}$ *và* $FE = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} AE = \sqrt{2} \\ AF = 3\sqrt{2} \end{cases}$

hay A là giao điểm của đường tròn $(E;\sqrt{2})$ và $(F;3\sqrt{2}) \Rightarrow$ tọa độ điểm A
(chú ý A,C khác phía EF để loại bớt 1 điểm A)

+) Từ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FD} \end{cases}$ *ta suy ra được tọa độ điểm B và D .*

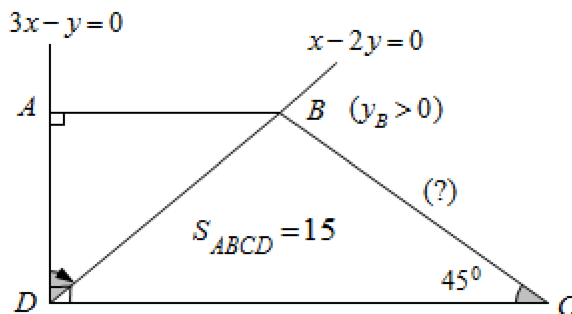
Ví dụ 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có đáy lớn CD và $\widehat{BCD} = 45^0$. Đường thẳng AD và BD lần lượt có phương trình $3x - y = 0$ và $x - 2y = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 15 và điểm B có tung độ dương.

Phân tích hướng giải :

***)** *Với việc $B \in BD$ đã biết phương trình và điều kiện B có tung độ dương giúp ta nghĩ tới nên đi tìm tọa độ điểm B trước. Do $AD \cap BD = \{D\}$ ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm D, khi đó $B \in BD$ và nếu cắt nghĩa được dữ kiện của bài toán để tính độ dài BD ta sẽ tìm được tọa độ điểm B theo* **Bài toán 1.** *Ở đây có dữ kiện $S_{ABCD} = 15$ (*) mà S_{ABCD} phụ thuộc vào AB, AD và DC. Nghĩa là trong đẳng thức (*) chứa tới 3 ẩn. Nếu thế sẽ cần giảm số ẩn, điều này chỉ có thể làm được khi AB, AD và DC có mối liên hệ với nhau, hay nói cách khác sẽ có hai trong ba ẩn trên biểu diễn được theo ẩn còn lại. Vậy ta sẽ cần khai thác số liệu cụ thể của bài toán. Dữ kiện bài toán cho góc $\widehat{BCD} = 45^0$ và AD, BD đã biết phương trình, từ đây gợi ý ta nên đi tính góc ADB (ta nháp $\cos(AD,BD) = \dfrac{|\overrightarrow{n_{AD}}.\overrightarrow{n_{BD}}|}{|\overrightarrow{n_{AD}}|.|\overrightarrow{n_{BD}}|} = \dfrac{|3+2|}{\sqrt{10}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$). Như vậy tam giác ABD và DBC lần lượt vuông cân tại A và B. Lúc này ta sẽ biểu diễn được AD, BD theo AB; từ (*) ta sẽ suy ra được AB và dễ dàng có được độ dài BD.*

***)** *Khi tìm được B suy ra được phương trình BC do $CB \perp BD$ (tam giác DBC vuông tại B).*

Giải :



+) Do $AD \cap BD = \{D\}$ nên tọa độ điểm D là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0;0)$

Ta có các vectơ pháp tuyến tương ứng của AD và BD là: $\overrightarrow{n_{AD}} = (3;-1), \overrightarrow{n_{BD}} = (1;-2)$

Suy ra: $\cos(AD,BD) = \dfrac{|\overrightarrow{n_{AD}}.\overrightarrow{n_{BD}}|}{|\overrightarrow{n_{AD}}|.|\overrightarrow{n_{BD}}|} = \dfrac{|3+2|}{\sqrt{10}.\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^0$

Khi đó tam giác ABD và BDC lần lượt vuông cân tại A và B, suy ra : $AB = AD = \dfrac{DC}{2}$

+) Ta có : $S_{ABCD} = \dfrac{(AB+DC).AD}{2} = \dfrac{(AB+2AB).AB}{2} = \dfrac{3}{2}AB^2 = 15 \Rightarrow AB = \sqrt{10} \Rightarrow BD = 2\sqrt{5}$

+) Gọi $B(2t;t)$ với $t>0$

Khi đó : $BD=2\sqrt{5}\Leftrightarrow BD^2=20\Leftrightarrow (2t)^2+t^2=20\Leftrightarrow t^2=4\Leftrightarrow t=2$ hoặc $t=-2$ (loại) $\Rightarrow B(4;2)$

+) Đường thẳng BC đi qua $B(4;2)$ và có véctơ pháp tuyến : $\overrightarrow{n_{BC}}=\overrightarrow{u_{BD}}=(2;1)$

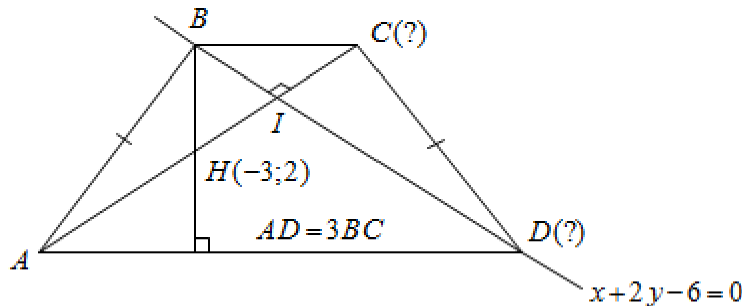
(vì tam giác BDC vuông tại B) nên ta có phương trình : $2(x-4)+(y-2)=0\Leftrightarrow 2x+y-10=0$

Ví dụ 13 (B – 2013 – CB). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD=3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x+2y-6=0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3;2)$ Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Phân tích hướng giải:

Với yêu cầu của bài toán, ban đầu sẽ cho ta được chùm các câu hỏi và các hướng phân tích sau: “Với C và D ta ưu tiên tìm điểm nào trước ? D đang thuộc đường thẳng BD đã biết phương trình, C thuộc đường thẳng AC mà ta hoàn toàn có thể viết được phương trình (AC đi qua H và vuông góc với BD). Khi đó giao điểm $\{I\}=BD\cap AC$ hoàn toàn xác định. Ta cần thêm những dữ kiện “có lợi” cho C và D ”. Do $ABCD$ là hình thang cân nên $IB=IC\Rightarrow \widehat{BCI}=45^0\Rightarrow BCH$ là tam giác cân tại $B\Rightarrow I$ là trung điểm của HC. Nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm C trước. Lúc này các dữ kiện chưa được khai thác là $BC//AD$ và $AD=3BC$, từ đây ta nghĩ tới định lý Ta – Lét và suy ra được $DI=3BI=3IH$. Khi đó việc tìm tọa độ điểm D được đưa về ***Bài toán 1***. *Cụ thể:* ***)** $D\in BD: x+2y-6=0$ ***)** $DI=3IH$

Giải:



+) Vì $AC\perp BD\Rightarrow \overrightarrow{n_{AC}}=\overrightarrow{u_{BD}}=(2;-1)$, nên AC có phương trình là: $2(x+3)-(y-2)=0\Leftrightarrow 2x-y+8=0$

Gọi $BD\cap AC=\{I\}$. Khi đó tọa độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+2y-6=0\\2x-y+8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}\Rightarrow I(-2;4)$$

+) Do $ABCD$ là hình thang cân nên $IB=IC\Rightarrow \widehat{BCI}=45^0\Rightarrow BCH$ là tam giác cân tại B

Suy ra I là trung điểm của $HC\Rightarrow C(-1;6)$

+) Áp dụng định lí Ta – lét với $AD//BC$ ta có: $\dfrac{ID}{IB}=\dfrac{AD}{BC}=3\Rightarrow ID=3IB=3IH=3\sqrt{5}$

+) Gọi $D(6-2t;t)\in BD$, khi đó $ID=3\sqrt{5}\Leftrightarrow ID^2=45$

$$\Leftrightarrow (2t-8)^2+(t-4)^2=45$$

$$\Leftrightarrow t^2-8t+7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(4;1) \\ D(-8;7) \end{array}\right.$$

Vậy $\begin{cases} C(-1;6) \\ D(4;1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} C(-1;6) \\ D(-8;7) \end{cases}$.

Nhận xét:

Khi bài toán yêu cầu tìm từ hai điểm trở lên thì thứ tự tìm điểm thường ưu tiên theo các dự kiện sau: Điểm cần tìm có liên quan tới hệ thức véc tơ (trong ví dụ trên I là trung điểm của HC cũng được hiểu là C liên hệ với H,I qua hệ thức vecto $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{IC}$), điểm thuộc đường đã biết phương trình…

Ví dụ 14. Cho tam giác ABC vuông tại A, điểm $B(1;1)$. Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM.BC=75$. Phương trình đường thẳng $AC: 4x+3y-32=0$. Tìm tọa độ điểm C biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC bằng $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Phân tích hướng giải :

**) Ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A là giao của AC và AB (AB đi qua B và vuông góc với AC).*

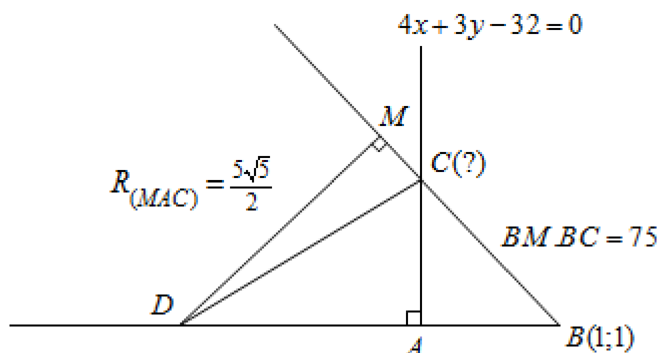
**) Khi bài toán có dữ kiện $BM.BC=75$ thường chúng ta nghĩ tới tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp đường tròn (kiến thức hình lớp 9 hay đề cập tới điều này) . Trong bài toán lại có yếu tố bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC, để khai thác được dữ kiện này gợi ý ta dựng thêm điểm D sao cho $ACMD$ nội tiếp đường tròn, việc này sẽ giúp ta cắt nghĩa được tất cả những thông số trên (Các bạn sẽ thấy rõ trong lời giải của bài toán).*

) Sau khi dựng điểm D ta sẽ cắt nghĩa các số liệu của bài toán để đi tính độ dài đoạn AC, khi đó ta sẽ tìm được tọa độ của điểm C theo góc nhìn của **Bài toán 1. Cụ thể:*

+) $C\in AC: 4x+3y-32=0$

+) *C cách A một khoảng xác định AC.*

Giải :



+) AB đi qua $B(1;1)$ và vuông góc với AC $(\overrightarrow{u_{AC}}=(3;-4))$ nên có phương trình: $3x-4y+1=0$

Do $AC\cap AB=\{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases}4x+3y-32=0\\3x-4y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}\Rightarrow A(5;4)$

+) Kẻ MD vuông góc với BC và cắt AB tại K, suy ra $ACMD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính CD (cũng chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác MAC), khi đó : $CD=2R=5\sqrt{5}$

Ta có $\Delta BMD\sim\Delta BAC$ (g.g) nên $\dfrac{BM}{BA}=\dfrac{BD}{BC}\Rightarrow BD=\dfrac{BM.BC}{BA}=\dfrac{75}{\sqrt{4^2+3^2}}=15>5=AB$

$\Rightarrow A$ nằm giữa B và D.

Khi đó $AD=BD-BA=15-5=10$, suy ra $AC=\sqrt{CD^2-AD^2}=\sqrt{(5\sqrt{5})^2-10^2}=5$

+) Gọi $C(8+3t;-4t)\in AC$, khi đó $AC=5\Leftrightarrow AC^2=25\Leftrightarrow(3t+3)^2+(4t+4)^2=25$

$$\Leftrightarrow 25t^2+50t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}C(8;0)\\C(2;8)\end{array}\right.$$

+) Vậy $C(8;0)$ hoặc $C(2;8)$.

2. CÁCH RA ĐỀ 2: *Cho biết M cách I (đã biết tọa độ) một khoảng không đổi. Cần dựa vào các dữ kiện của bài toán để viết phương trình đường thẳng chứa M.*

Ví dụ 1 (B – 2005). Cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

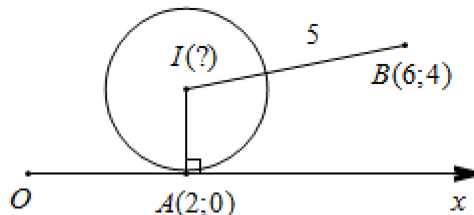
Phân tích hướng giải **:**

Muốn viết phương trình đường tròn (C) cần tìm tọa độ tâm I và bán kính $R=IA$.

- *) *I cách B một khoảng không đổi $IB=5$.*
- *) *Đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A nên I thuộc đường thẳng đi qua A vuông góc với trục hoành (trục Ox)*

*Như vậy việc tìm điểm I đã được chuyển về **Bài toán 1**.*

Giải **:**



+) Đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A nên $IA\perp Ox$, suy ra phương trình $IA: x=2$

+) Gọi $I(2;t)\in AI$, khi đó $IB=5\Leftrightarrow IB^2=25\Leftrightarrow 4^2+(t-4)^2=25\Leftrightarrow(t-4)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=7\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}I(2;1)\\I(2;7)\end{array}\right.$

+) Với $I(2;1)$ thì bán kính $R = IA = 1$, suy ra phương trình đường tròn : $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

+) Với $I(2;7)$ thì bán kính $R = IA = 7$, suy ra phương trình đường tròn : $(x-2)^2+(y-7)^2=49$

Vậy phương trình đường tròn cần lập là $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(x-2)^2+(y-7)^2=49$.

Ví dụ 2 (B – 2009 – CB). Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$ và $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định toạ độ tâm K và bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

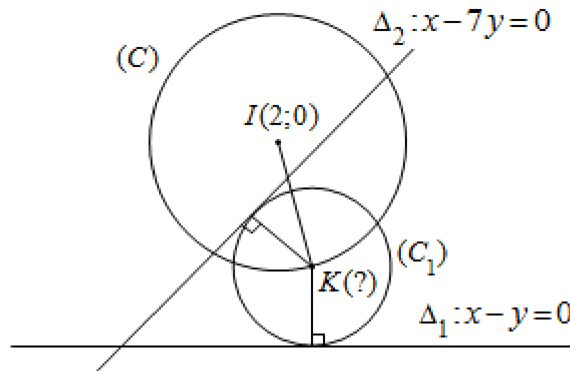
***Phân tích hướng giải* :**

*) *(C_1) tiếp xúc với $\Delta_1,\Delta_2 \Rightarrow K$ thuộc đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2.*

*) $K\in(C)\Rightarrow IK = R = \frac{2}{\sqrt{5}}$

→ *chuyển về* ***Bài toán 1.***

***Giải* :**



+) Đường tròn (C) có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

+) Ta có : (C_1) tiếp xúc với $\Delta_1,\Delta_2 \Rightarrow K$ thuộc đường phân giác của góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2.

Khi đó gọi $K(x;y)\Rightarrow d(K,\Delta_1)=d(K,\Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{|x-7y|}{5\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x-y)=x-7y \\ 5(x-y)=7y-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ x-2y=0 \end{array}\right.$$

+) Với đường phân giác $d_1: 2x+y=0$. Gọi $K(t;-2t)\in d_1$

Vì $K\in(C)\Rightarrow IK=\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow IK^2=\frac{4}{5}\Leftrightarrow (t-2)^2+4t^2=\frac{4}{5}\Leftrightarrow 25t^2-20t+16=0$ (vô nghiệm).

+) Với đường phân giác $d_2: x-2y=0$. Gọi $K(2t;t)\in d_2$

Vì $K \in (C) \Rightarrow IK = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow IK^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow (2t-2)^2 + t^2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 25t^2 - 40t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{5} \Rightarrow K\left(\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

Khi đó bán kính của đường tròn (C_1) : $d(K,\Delta_1) = \frac{\left|\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Ví dụ 3 (B – 2012 – CB). Cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$, $(C_2): x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d.

Phân tích hướng giải: *Muốn viết phương trình đường tròn ta cần:*

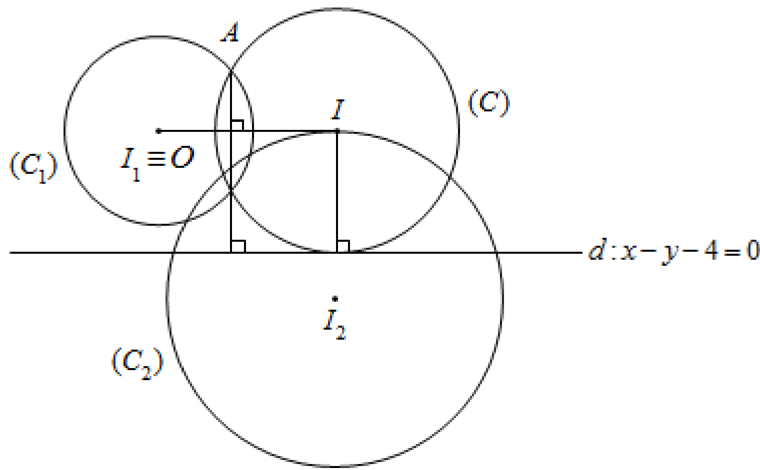
) Xác định tâm I bằng "góc nhìn" của **Bài toán 1. Cụ thể:*

Ta đi lập phương trình II_1 đi qua I_1 vuông góc với AB (tính chất đường nối tâm) hay song song với d. Khi đó: +) $I \in II_1$ đã biết phương trình. +) $I \in (C_2)$ hay $II_2 = R_2$

*(Ta có thể làm theo **Cách 2** với $\{I\} = II_1 \cap (C_2) \rightarrow$ tọa độ I - cách trình bày khác của **Bài toán 1**).*

**) Xác định bán kính: R nhờ $R = d(I,d)$*

Giải:



Gọi I là tâm đường tròn (C) cần viết phương trình. Ta có $(C_1): x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ tâm của (C_1) là $I_1(0;0)$

Vì $\begin{cases} II_1 \perp AB \\ AB \perp d \end{cases} \Rightarrow II_1 // d \Rightarrow$ phương trình II_1: $x - y = 0$.

Gọi $I(t;t) \in II_1$ mà $I \in (C_2) \Rightarrow t^2 + t^2 - 12t + 18 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow I(3;3)$

Mà (C) tiếp xúc với $d \Rightarrow R = d(I,d) = \frac{|3-3+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$. Vậy phương trình (C) là: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I(0;5)$ Đường thẳng AI cắt đường tròn (T) tại điểm $M(5;0)$ với $M \neq A$. Đường cao từ đỉnh C cắt đường tròn (T) tại điểm $N\left(-\frac{17}{5};-\frac{6}{5}\right)$ với $N \neq C$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết B có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải:

**) Vẫn một câu hỏi quen thuộc đầu tiên nên đặt ra " Với dữ kiện của bài toán, thứ tự các điểm sẽ được tìm như thế nào ?" . Ở đây chúng ta dễ dàng trả lời được câu hỏi này bằng việc tìm được tọa độ điểm A đầu tiên (do I là trung điểm của AM) . Tiếp đến sẽ là điểm B (dữ kiện B có hoành độ dương gợi ý điều này)*

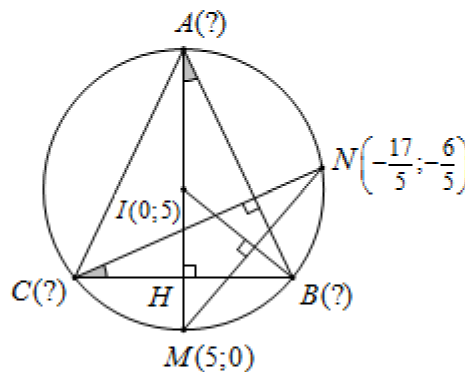
) $IB = IM = 5\sqrt{2}$, ta cần thêm một dữ kiện liên quan tới điểm B. Lúc này cần tạo ra mối liên hệ điểm B với các số liệu đã biết của bài toán. Ta có $M(5;0), N\left(-\frac{17}{5};-\frac{6}{5}\right)$ đã biết tọa độ và bằng việc vẽ hình chính xác ta có thể suy đoán $IB \perp MN$. Nếu có được điều này ta sẽ dễ dàng viết được phương trình IB và việc tìm điểm B là không khó khi ta đã nhìn thấy* ***Bài toán 1**.*

**) Bằng kiến thức hình học sơ cấp (kiến thức hình học cấp 2) ta dễ dàng chứng minh được $IB \perp MN$.*

**) Sau khi tìm được tọa độ điểm B ta sẽ suy ra được tọa độ điểm C (do C đối xứng với B qua AM).*

Sau đây là lời giải chi tiết cho ví dụ trên:

Giải:



+) Vì I là trung điểm của AM nên $A(-5;10)$

+) Ta có $\widehat{NCB} = \widehat{MAB}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow BN = BM$ (tính chất góc nội tiếp)

Suy ra IB là đường trung trực của MN, khi đó IB đi qua I vuông góc với MN nên có phương trình:

$$7x + y - 5 = 0 \quad (\text{với } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{42}{5};-\frac{6}{5}\right) = -\frac{6}{5}(7;1))$$

+) Gọi $B(t;5-7t)$ với $t > 0$, khi đó :

$$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow t^2 + (7t)^2 = 50 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -1 \text{ (loại)} \Rightarrow B(1;-2)$$

+) Phương trình $AM: x + y - 5 = 0$, suy ra BC đi qua B vuông góc AM có phương trình: $x - y - 3 = 0$

Gọi $AM \cap BC = \{H\}$, suy ra tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y-3=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(4;1)$

Do H là trung điểm của $BC \Rightarrow C(7;4)$. Vậy $A(-5;10)$, $B(1;-2)$, $C(7;4)$.

Ví dụ 5 (A – 2012 – NC). Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Phân tích hướng giải:

**) Phương trình (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ như vậy ta cần tìm $a;b$*

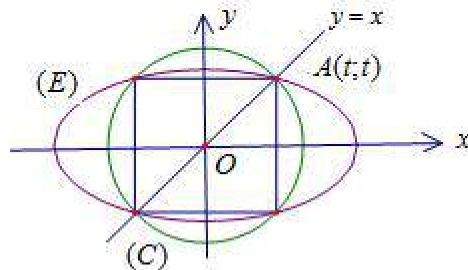
**) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$*

) Dữ kiện (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai . Ta giả sử có đỉnh A thuộc đường phân giác Δ: $y=x$. Vậy việc tìm tọa độ điểm A quay về **Bài toán 1 nhờ:*

+) $A \in \Delta: y=x$ +) $AO=R=2\sqrt{2}$ (hay $A \in (C)$)

**) Mà $A \in (E) \Rightarrow b \rightarrow$ phương trình (E).*

Giải:



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

+) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 $\Rightarrow 2a=8 \Rightarrow a=4$

+) (E) cắt (C) tại bốn điểm phân biệt tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông nên 4 đỉnh nằm trên hai đường phân giác thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ hai .

Ta giả sử A là một giao điểm của (E) và (C) thuộc đường phân giác Δ: $y=x$.

+) Gọi $A(t;t) \in \Delta$ ($t>0$). Ta có: $A \in (C) \Rightarrow t^2+t^2=8 \Leftrightarrow t=2$ (vì $t>0$) $\Rightarrow A(2;2)$

+) Mà $A \in (E) \Rightarrow \frac{2^2}{4^2}+\frac{2^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\frac{16}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$

Ví dụ 6 (D – 2013 – NC). Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $\Delta: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tâm của (C), các đỉnh N và P thuộc Δ, đỉnh M và trung điểm của cạnh MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

Phân tích hướng giải:

) Với dữ kiện của bài toán ra dễ dàng tìm được tọa độ điểm M qua góc nhìn của **Bài toán 1. Cụ thể:*

+) M thuộc đường thẳng đi qua I vuông góc với Δ. *+) $MI=R=2$ ($M\in(C)$).*

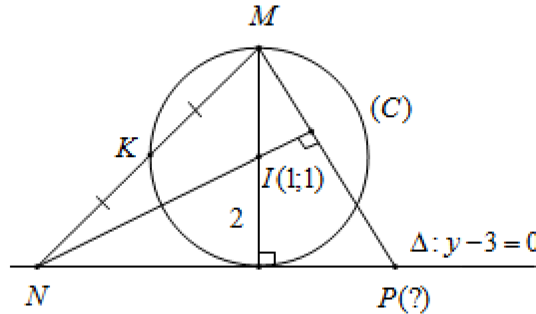
) Khi tìm được điểm M ta sẽ tìm điểm N thông qua điểm K và tiếp tục sử dụng **Bài toán 1. Cụ thể:*

+) $N(t)\in\Delta: y-3=0 \Rightarrow K(t)$ (do K là trung điểm của MN). *+) $KI=R=2$.*

) Việc tìm điểm P được vận dụng nhờ **Bài toán 3*

*(các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ thông qua **Bài toán 3** ở phần sau)*

Giải:



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.

Do đó $d(I;\Delta)=\frac{|1-3|}{1}=2=R \Rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C). Khi đó $IM\perp\Delta$, suy ra phương trình IM là: $x=1$

+) Gọi $M(1;t)\in IM$. Mà $M\in(C)\Rightarrow(1-1)^2+(t-1)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.$

$\Rightarrow M(1;-1)$ hoặc $M(1;3)$ (loại vì $M\notin\Delta$)

+) Với $M(1;-1)$, khi đó gọi $N(a;3)\in\Delta\Rightarrow K\left(\frac{a+1}{2};1\right)$ là trung điểm của MN.

Do $K\in(C)\Rightarrow\left(\frac{a+1}{2}-1\right)^2+(1-1)^2=4\Leftrightarrow(a-1)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}N(5;3)\\N(-3;3)\end{array}\right.$

+) Gọi $P(m;3)\in\Delta$, khi đó với:

*) $N(5;3)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IN}=(4;2)\\\overrightarrow{MP}=(m-1;4)\end{cases}$, từ $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{MP}=0\Leftrightarrow4(m-1)+2.4=0\Leftrightarrow m=-1\Rightarrow P(-1;3)$

*) $N(-3;3)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IN}=(-4;2)\\\overrightarrow{MP}=(m-1;4)\end{cases}$, từ $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{MP}=0\Leftrightarrow-4(m-1)+2.4=0\Leftrightarrow m=3\Rightarrow P(3;3)$

Ví dụ 7. Cho hai đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=2$ và $(C'): (x-4)^2+(y-5)^2=8$. Cho AB là một đường kính thay đổi của đường tròn (C') và M là một điểm di động trên đường tròn (C). Tìm tọa độ các điểm M, A, B sao cho diện tích của tam giác MAB lớn nhất.

Phân tích hướng giải **:**

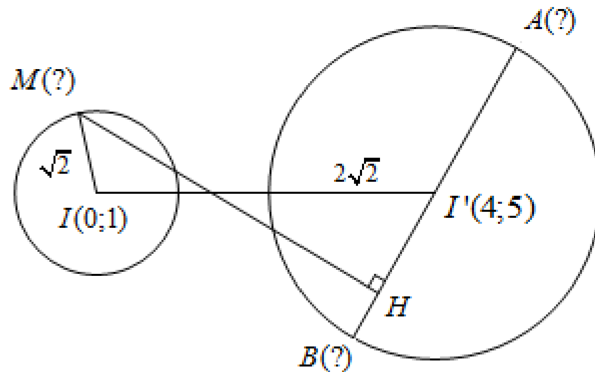
****)*** *Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$, (C') có tâm $I'(4;5)$ và bán kính $R'=2\sqrt{2}$*

Vì $M\in(C)$ nên ta có : $MI=R=\sqrt{2}$. Vậy nếu ta chỉ ra được M đang thuộc một đường thẳng đã biết phương trình thì việc tìm điểm M sẽ quay về **Bài toán 1**.

****)*** *Ta sẽ cắt nghĩa dữ kiện tam giác MAB có diện tích lớn nhất (khớp dấu "=") để chỉ ra được điều này*

Các bạn tham khảo phần cắt nghĩa ở lời giải chi tiết sau đây:

Giải **:**

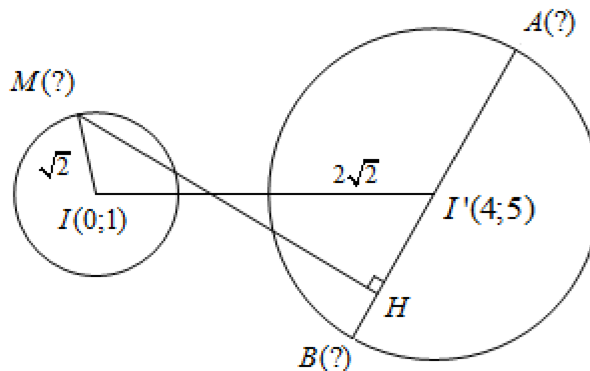


+) Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$, (C') có tâm $I'(4;5)$ và bán kính $R'=2\sqrt{2}$.

Khi đó $II'=4\sqrt{2}>3\sqrt{2}=R+R'$ nên (C) và (C') ngoài nhau.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB. Khi đó : $S_{MAB}=\frac{1}{2}MH.AB=\frac{1}{2}MH.2R'=\sqrt{2}MH$

Ta có : $MH\le MI'\le MI+II'=\sqrt{2}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}$. Do đó : $S_{MAB}=\sqrt{2}MH\le\sqrt{2}.5\sqrt{2}=10$



+) Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H\equiv I'$ và $II'\cap(C)=\{M\}$ với I nằm giữa M và I' và $AB\perp II'$

Ta có $\overrightarrow{II'} = (4;4) = 4.(1;1)$ nên II' có phương trình : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \end{cases}$

Gọi $M(t;1+t) \in II'$, khi đó $M \in (C)$ nên $t^2 + t^2 = 2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(1;2) \\ M(-1;0) \end{array}\right.$

+) Với $M(1;2)$, khi đó $MI' = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} < II' \Rightarrow M$ nằm giữa I và I' (loại).

Với $M(-1;0)$, khi đó $MI' = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} > II' \Rightarrow I$ nằm giữa M và I' (thỏa mãn).

+) AB vuông góc với II' và đi qua I' nên có phương trình: $x + y - 9 = 0$

Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 9 = 0 \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 - x \\ (x-4)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 7 \\ x = 6; y = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(2;7), B(6;3) \\ A(6;3), B(2;7) \end{array}\right.$$

Vậy $M(-1;0), A(2;7), B(6;3)$ hoặc $M(-1;0), A(6;3), B(2;7)$

3. CÁCH RA ĐỀ 3: *(Kết hợp từ **Cách ra đề 1** và **Cách ra đề 2**).*

Dựa vào các dữ kiện của bài toán cần:

+) *Tính được độ dài đoạn MI (với I đã biết tọa độ).*

+) *Viết phương trình đi qua điểm M .*

Ví dụ 1 : Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và điểm $A(4;2)$. Gọi d là tiếp tuyến tại A của (C). Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm I của (C) và Δ cắt d tại M sao cho tam giác AIM có diện tích bằng 25 và M có hoành độ dương.

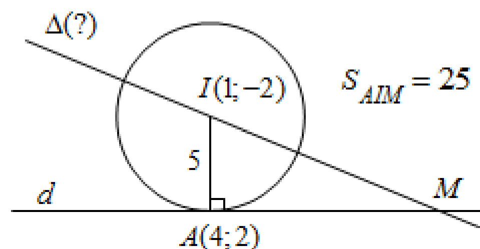
Phân tích hướng giải **:**

Muốn viết được phương trình Δ trong bài toán trên ta cần tìm được tọa độ của điểm M .

***)** *Ta viết được phương trình d đi qua A và vuông góc với IA, khi đó $M \in d$: đã biết phương trình.*

)** $S_{AIM} = 25 \Rightarrow MA = \dfrac{2S_{AIM}}{MA}$ $\rightarrow$ *chuyển về **Bài toán 1.

Giải **:**



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 5$.

Vì d là tiếp tuyến tại A của (C) nên $\overrightarrow{n_d} = \overrightarrow{IA} = (3;4) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (4;-3)$, suy ra phương trình $d: \begin{cases} x = 4+4t \\ y = 2-3t \end{cases}$

+) Ta có: $S_{AIM} = 25 \Leftrightarrow \frac{1}{2}MA.IA = 25 \Leftrightarrow MA = 10$ (với $IA = R = 5$)

+) Gọi $M(4+4t;2-3t) \in d$, khi đó $MA = 10 \Leftrightarrow \sqrt{16t^2+9t^2} = 10 \Leftrightarrow 5|t| = 10 \Leftrightarrow t = \pm 2$

$\Rightarrow M(10;-4)$ hoặc $M(-4;8)$ (loại)

+) Khi đó $\overrightarrow{IM} = (9;-2)$, suy ra phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1+9t \\ y = -2-2t \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 2, đường thẳng đi qua A và B có phương trình $x - y = 0$. Tìm tọa độ trung điểm M của AC biết $I(2;1)$ là trung điểm của BC.

Phân tích hướng giải **:**

*) Vì I là trung điểm của BC nên $S_{ABI} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 1$

Khi đó ta dễ dàng tính được độ dài đoạn $AB = \frac{2S_{ABI}}{d(I,AB)}$.

*) Lúc này ta sẽ nhìn thấy tọa độ điểm M "lộ diện" qua góc nhìn của **Bài toán 1**. Do MI là đường trung bình của tam giác ABC nên

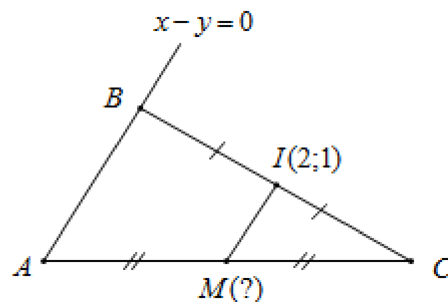
+) $M \in MI$: là đường thẳng đi qua I song song với AB +) $MI = \frac{AB}{2}$

Giải **:**

+) Ta có $d(I,AB) = \frac{|2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

+) Do I là trung điểm của BC nên $S_{ABI} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 1$

Khi đó $AB = \frac{2S_{ABI}}{d(I,AB)} = \frac{2.1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$.



+) Mặt khác MI là đường trung bình của tam giác ABC nên IM đi qua I song song với AB có phương trình: $x - y - 1 = 0$ và $MI = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

+) Gọi $M(t;t-1) \in MI$, khi đó $MI = \sqrt{2} \Leftrightarrow MI^2 = 2 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (t-2)^2 = 2 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(3;2) \\ M(1;0) \end{array}\right.$$

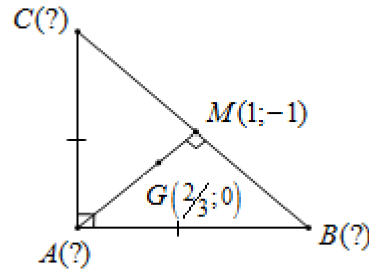
Ví dụ 3 (B – 2003). Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^0$. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3};0\right)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Phân tích hướng giải **:**

****)*** *Do G là trọng tâm nên $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Rightarrow$ tọa độ điểm A.*
Khi đó B,C thuộc đường thẳng đi qua M vuông góc với AM.

****)*** *ΔABC vuông cân tại A nên $MB = MC = MA$ (B,C thuộc đường tròn tâm M bán kính MA)*
$\rightarrow$ chuyển về ***Bài toán 1.***

Giải **:**



+) Do G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} = (1;-3)$

Gọi $A(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1-x;-1-y)$

Suy ra $\begin{cases} 1-x=1 \\ -1-y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;2)$.

+) BC đi qua $M(1;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (1;-3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình :
$(x-1)-3(y+1)=0$ hay $x-3y-4=0$.

+) ΔABC vuông cân tại A nên $MB = MC = MA = \sqrt{10}$, suy ra B,C thuộc đường tròn $(M;\sqrt{10})$ có phương trình : $(x-1)^2+(y+1)^2=10$

+) Vậy tọa độ hai điểm B,C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x-3y-4=0 \\ (x-1)^2+(y+1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+4 \\ 10(y+1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+4 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} B(4;0) \\ C(-2;-2) \end{cases} \\ \begin{cases} B(-2;-2) \\ C(4;0) \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)$ hoặc $A(0;2), B(-2;-2), C(4;0)$.

Ví dụ 4 (D – 2013 – CB). Cho tam giác ABC có điểm $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(-2;4)$ và điểm $I(-1;1)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm C.

Phân tích hướng giải **:**

*) *Nếu ta biết được tọa độ điểm A, thì ta sẽ tìm được tọa độ điểm C theo góc nhìn của* ***Bài toán 1****.*

Cụ thể : +) $C \in AH$ *: là đường thẳng đi qua hai điểm* H, A *đã biết tọa độ.*

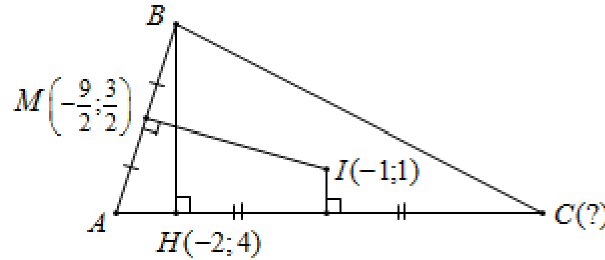
+) $CI = AI$ *(*C *cách* I *một khoảng không đổi là* IA*).*

*) *Như vậy vấn đề là phải đi tìm điểm* A*. Lúc này* ***Bài toán 1*** *tiếp tục là sự lựa chọn để ta đi tìm điểm* A*.*

Cụ thể : +) $A \in AB$ *: là đường thẳng đi qua* M *và vuông góc với* MI*.*

+) $AM = MH$ *(tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).*

Giải **:**



+) AB đi qua $M\left(-\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$ và nhận $\overrightarrow{MI}=\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(7;-1)$ làm véctơ pháp tuyến nên có phương trình:

$7\left(x+\frac{9}{2}\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)=0$ hay $7x-y+33=0$.

+) Gọi $A(t;7t+33)\in AB$, khi đó theo tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông ta có:

$$AM=MH \Leftrightarrow AM^2=MH^2 \Leftrightarrow \left(t+\frac{9}{2}\right)^2+\left(7t+33-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{9}{2}-2\right)^2+\left(4-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2+9t+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=-5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(-4;5) \\ A(-5;-2) \end{array}\right.$$

+) Với $A(-4;5)$, khi đó AC đi qua $A(-4;5)$ và $H(-2;4)$ nên có phương trình:

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{-1} \Leftrightarrow x+2y-6=0$$. Gọi $C(6-2c;c)\in AC$, khi đó:

$$CI=AI \Leftrightarrow CI^2=AI^2 \Leftrightarrow (2c-7)^2+(c-1)^2=3^2+4^2 \Leftrightarrow c^2-6c+5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=5 \end{array}\right. \Rightarrow C(4;1) \text{ hoặc } C(-4;5) \text{ (loại vì } C\equiv A)$$

+) Với $A(-5;-2)$, khi đó AC đi qua $A(-5;-2)$ và $H(-2;4)$ nên có phương trình:

$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+2}{6} \Leftrightarrow 2x-y+8=0$$

Gọi $C(m;2m+8)\in AC$, khi đó :

$$CI=AI \Leftrightarrow CI^2=AI^2 \Leftrightarrow (m+1)^2+(2m+7)^2=4^2+3^2 \Leftrightarrow m^2+6m+5=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-5 \end{array}\right. \Rightarrow C(-1;6) \text{ hoặc } C(-5;2) \text{ (loại vì } C\equiv A)$$. Vậy $C(-1;6)$.

Ví dụ 5. Cho các điểm $A(10;5), B(15;-5)$ và $D(-20;0)$ là các đỉnh của hình thang cân $ABCD$ trong đó AB song song với CD. Tìm tọa độ đỉnh C.

Phân tích hướng giải : *Ở ví dụ này ta có thể tìm tọa độ điểm C theo hai cách :*

Cách 1 *: Ta sẽ tìm C theo góc nhìn của **Bài toán 1**. Cụ thể:*

***)** *C thuộc đường thẳng đi qua D và song song với AB nên dễ dàng viết được phương trình CD.*

***)** *$ABCD$ là hình thang cân nên ta có điều kiện cần: $CB = AB = 5\sqrt{37}$.*

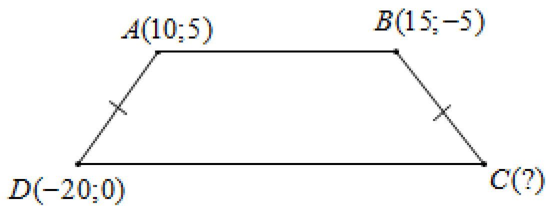
Sau khi tìm được C ta sẽ kiểm tra điều kiện đủ BC không song song AD và kết luận được tọa độ điểm C cần tìm.

Cách 2: *Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, khi đó :*

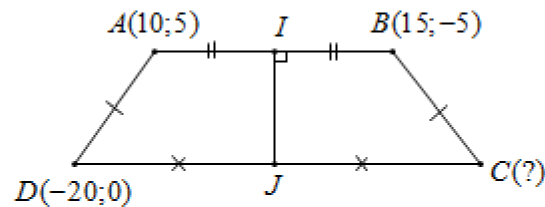
**) Ta dễ dàng viết được phương trình IJ và tìm ra được tọa độ điểm J .*

**) J là trung điểm của CD (vì $ABCD$ là hình thang cân) nên ta suy ra được tọa độ điểm C.*

Giải :



Cách 1



Cách 2

Cách 1 :

+) Có $\overrightarrow{AB} = (5;-10) = 5.(1;-2)$, khi đó $CD // AB$ nên CD có phương trình: $\begin{cases} x = -20 + t \\ y = -2t \end{cases}$

+) Gọi $C(-20+t;-2t) \in CD$, khi đó $ABCD$ là hình thang cân nên ta có:

$$AD = BC \Leftrightarrow AD^2 = BC^2 \Leftrightarrow 30^2 + 5^2 = (t-35)^2 + (2t-5)^2 \Leftrightarrow t^2 - 18t + 65 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 5 \\ t = 13 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(-15;-10) \\ C(-7;-26) \end{array}\right.$$

+) Với $C(-15;-10) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-30;-5) = \overrightarrow{AD} \Rightarrow BC // AD$ (không thỏa mãn vì $ABCD$ là hình thang cân)

+) Với $C(-7;-26) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-22;-21)$, khi đó $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương (thỏa mãn). Vậy $C(-7;-26)$.

Cách 2:

+) Có $\overrightarrow{AB} = (5;-10) = 5.(1;-2)$, khi đó $CD // AB \Rightarrow \overrightarrow{n_{CD}} = \overrightarrow{n_{AB}} = (2;1)$ và CD đi qua $D(-20;0)$ nên có phương trình: $2(x+20) + y = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 40 = 0$

+) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, khi đó $I\left(\frac{25}{2};0\right)$ và $IJ \perp AB$ (do $ABCD$ là hình thang cân) nên IJ có phương trình: $1.\left(x - \frac{25}{2}\right) - 2.y = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 25 = 0$

+) Vì $IJ \cap CD = \{J\}$ nên tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x+y+40=0 \\ 2x-4y-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{27}{2} \\ y=-13 \end{cases} \Rightarrow J\left(-\dfrac{27}{2};-13\right)$

+) Do J là trung điểm của CD nên suy ra $C(-7;-26)$.

Ví dụ 6. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(3;3)$ và $AC=2BD$. Điểm $M\left(2;\dfrac{4}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB, điểm $N\left(3;\dfrac{13}{3}\right)$ thuộc đường thẳng CD. Viết phương trình đường chéo BD biết đỉnh B có tung độ nguyên.

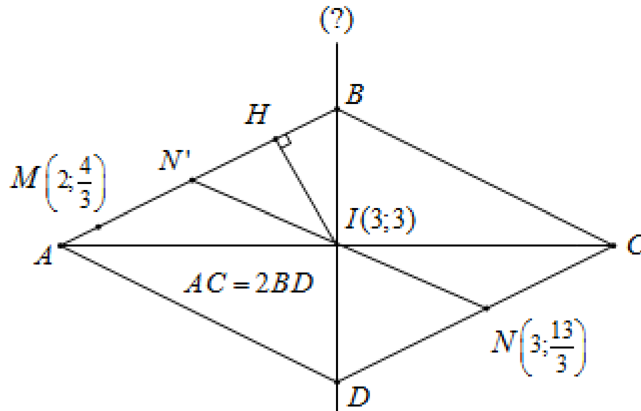
Phân tích hướng giải :

*Nếu tìm được tọa độ điểm B ta sẽ dễ dàng viết được phương trình BD (đi qua I và B). Việc tìm tọa độ điểm B sẽ được chuyển về **Bài toán 1**. Cụ thể :*

**) Lúc này khai thác tính đối xứng của hình thoi ta sẽ tìm được tọa độ điểm N' thuộc AB đối xứng với N qua I và khi đó ta sẽ viết được phương trình AB đi qua hai điểm M, N' đã biết tọa độ. Như vậy điểm B thuộc đường thẳng AB đã biết phương trình.*

**) Ta sẽ khai thác dữ kiện cuối cùng của bài toán là $AC=2BD$ để tính độ dài đoạn IB (chi tiết xem ở phần lời giải)*

Giải :



+) Gọi N' là điểm đối xứng với N qua I (hay I là trung điểm của NN') suy ra $N'\left(3;\dfrac{5}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB khi đó AB nhận $\overrightarrow{MN'}=\left(1;\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}(3;1)$ làm véctơ chỉ phương , suy ra $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;-3)$

Phương trình $AB: x-3y+2=0$

+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB nên $IH=d(I,AB)=\dfrac{|3-9+2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$

Mặt khác $AC=2BD \Rightarrow AI=2IB$. Khi đó xét tam giác IBA ta có :

$$\frac{1}{IB^2}+\frac{1}{IA^2}=\frac{1}{IH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IB^2}+\frac{1}{4IB^2}=\frac{5}{8} \Leftrightarrow IB^2=2 \Leftrightarrow IB=\sqrt{2}$$

+) Gọi $B(3t-2;t)\in AB$ với $t\in\mathbb{Z}$, khi đó : $IB^2=2 \Leftrightarrow (3t-5)^2+(t-3)^2=2$

$$\Leftrightarrow 5t^2-18t+16=0 \Leftrightarrow t=2 \text{ hoặc } t=\frac{8}{5} \text{ (loại).}$$

+) Vậy $B(4;2)$, khi đó đường chéo BD đi qua hai điểm $B(4;2)$ và $I(3;3)$ nên có phương trình:

$$\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-3}{2-3} \text{ hay } x+y-6=0$$

Nhận xét: *Vì hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông nhận giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình đó. Nên nếu trong đề bài cho một điểm thuộc một cạnh thì các bạn nên nghĩ tới việc tìm điểm đối xứng của điểm đó qua tâm của hình chứa nó (ở đây tâm đã biết tọa độ).*

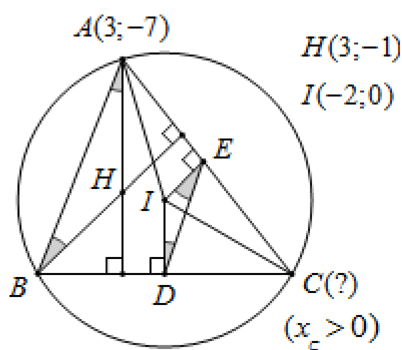
Ví dụ 7 (D – 2010 – CB): Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3;-7)$, trực tâm là $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải **:** *Ta cần tìm tọa độ điểm C. Với :*

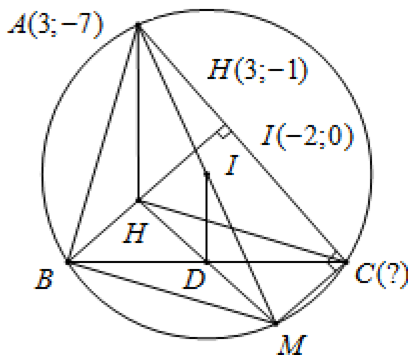
*) $CI=IA=\sqrt{74}$.

*) *Nếu viết được phương trình cạnh BC ta sẽ chuyển bài toán về* ***Bài toán 1.*** *Lúc này việc viết phương trình BC ta chỉ cần tìm thêm tọa độ một điểm thuộc BC. Ở đây ta có thể tìm được hình chiếu D của I xuống BC hoặc chân đường cao K của A xuống BC (khi đó bài toán được giải quyết triệt để) qua các cách giải cụ thể sau:*

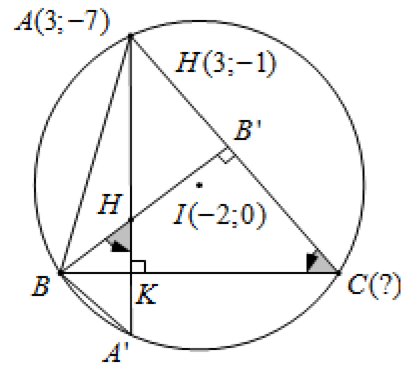
Giải **:**



Cách 1.1



Cách 1.2



Cách 2

Cách 1: Ta sẽ đi tìm tọa độ hình chiếu D của I trên BC (hay chính là trung điểm của BC) qua 2 cách sau:

Cách 1.1

+) Gọi D, E lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Khi đó : $\widehat{HAB} = \widehat{IDE}$ và $\widehat{HBA} = \widehat{IED}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

Suy ra $\Delta HAB \sim \Delta IDE$ nên $\dfrac{HA}{ID} = \dfrac{AB}{DE} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{ID}$ (*)

+) Có : $\overrightarrow{AH} = (0;6)$. Gọi $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{ID} = (x+2;y)$, khi đó từ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2(x+2) \\ 6 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-2;3)$

Cách 1.2

+) Kéo dài AI cắt đường tròn tại điểm M (khác A), khi đó I là trung điểm của AM nên suy ra $M(-7;7)$

Mặt khác : $BH // MC$ (cùng vuông góc với AC) và $CH // MB$ (cùng vuông góc với AB),

suy ra $MBHC$ là hình bình hành, khi đó D cũng là trung điểm của HM nên suy ra $D(-2;3)$

(Trong ***Cách 1.2*** ta có thể chỉ ra luôn được $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{ID}$ (*), sau khi có được D là trung điểm của HM).

Cách 2: Ta sẽ đi tìm tọa độ chân đường cao K của A xuống BC.

+) Ta có $A(3;-7)$ và $H(3;-1)$ nên đường thẳng AH có phương trình : $x = 3$

Kéo dài AH cắt đường tròn tại điểm H' (khác A). Gọi $H'(3;t) \in AH$ với $t \neq -7$, khi đó :

$IH'^2 = IA^2 = R^2 \Leftrightarrow 5^2 + t^2 = 5^2 + 7^2 \Leftrightarrow t = 7$ hoặc $t = -7$ (loại) $\Rightarrow H'(3;7)$

+) Gọi $AH \cap BC = \{K\}$ và $BH \cap AC = \{B'\}$, suy ra $KHB'C$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{BHK}$ (cùng bù với $\widehat{B'HK}$) . Mặt khác: $\widehat{C} = \widehat{BH'A}$ (cùng chắn cung AB).

Suy ra $\widehat{BHK} = \widehat{BH'A}$ hay tam giác HBH' cân tại $B \Rightarrow K$ là trung điểm của $HH' \Rightarrow K(3;3)$

(Như vậy khi biết tọa độ điểm D hoặc điểm K thì ta dễ dàng viết được phương trình BC . Ở phần trình bày tiếp theo ta lấy số liệu của điểm D (điểm K tương tự)).

+) BC đi qua D và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AH} = (0;6)$ nên phương trình BC là : $6(y-3) = 0$ hay $y = 3$

+) Gọi $C(t;3) \in BC$ (với $t > 0$) , khi đó :

$$CI = IA = \sqrt{74} \Leftrightarrow CI^2 = 74 \Leftrightarrow (t+2)^2 + 3^2 = 74 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 65$$

$$\Leftrightarrow t = -2 + \sqrt{65} \text{ hoặc } t = -2 - \sqrt{65} \text{ (loại)}$$

Vậy $C(-2+\sqrt{65};3)$

Nhận xét:

Ví dụ này còn khá nhiều cách giải, trong đó có cả cách giải của Bộ Giáo Dục – Song cách giải này "thiếu tự nhiên" nên tác giả không trình bày ở đây.

Ví dụ 8. Cho hai điểm $A(1;2)$, $B(4;3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\widehat{MAB} = 135^0$ và khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Phân tích hướng giải :

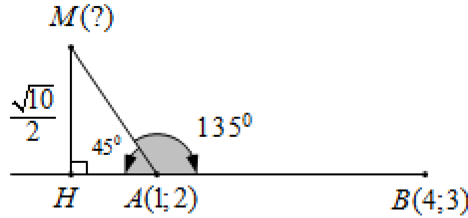
*) *Vì MA đi qua A, hợp với đường thẳng AB góc 45^0 (bù với góc 135^0) nên ta sẽ viết được phương trình MA (các bạn sẽ được tìm hiểu kĩ ở **Bài toán 6**)* .

*) *Do* $d(M,AB)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ *nên ta dễ dàng tính được độ dài đoạn* $MA=\sqrt{5}$.

Như vậy điểm M *đã được "lộ diện" theo góc nhìn của* ***Bài toán 1***. *Cụ thể:*

+) $M\in MA$: *đã biết phương trình.* +) $MA=\sqrt{5}$

Giải :



+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB, khi đó : $MH=d(M,AB)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Ta có $\widehat{MAH}=180^0-\widehat{MAB}=180^0-135^0=45^0$, suy ra tam giác MHA cân tại H, khi đó :

$$MA=\sqrt{2}MH=\sqrt{2}.\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{5}$$

+) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1)$ nên $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;-3)$, khi đó phương trình AB là : $x-1-3.(y-2)=0\Leftrightarrow x-3y+5=0$

Gọi $\overrightarrow{n_{MA}}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$, khi đó $\cos(MA,AB)=\dfrac{|a-3b|}{\sqrt{10}.\sqrt{a^2+b^2}}=\cos 45^0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow (a-3b)^2=5(a^2+b^2)\Leftrightarrow 2a^2+3ab-2b^2=0\Leftrightarrow 2.\left(\frac{a}{b}\right)^2+3.\frac{a}{b}-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=-2\\ \frac{a}{b}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vì $\widehat{MAB}=135^0$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AM.AB.\cos135^0<0$

+) Với $\dfrac{a}{b}=-2$ chọn $\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_{MA}}=(2;-1)$, khi đó AM có phương trình : $2x-y=0$

Gọi $M(t;2t)\in AM$, khi đó $MA=\sqrt{5}\Leftrightarrow MA^2=5$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2+(2t-2)^2=5\Leftrightarrow (t-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=2\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(0;0)\\ M(2;4)\end{array}\right.$$

Với $M(2;4)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(1;2)\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=5>0$ (loại)

Với $M(0;0)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(-1;-2)\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-5<0$ (thỏa mãn).

+) Với $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$ chọn $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{n_{MA}}=(1;2)$, khi đó AM có phương trình : $x+2y-5=0$

Gọi $M(5-2t;t)\in AM$, khi đó :

$$MA=\sqrt{5}\Leftrightarrow MA^2=5\Leftrightarrow (2t-4)^2+(t-2)^2=5\Leftrightarrow (t-2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}M(3;1)\\ M(-1;3)\end{array}\right.$$

Với $M(3;1) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5 > 0$ (loại)

Với $M(-1;3) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2;1) \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -5 < 0$ (thỏa mãn). Vậy $M(0;0)$ hoặc $M(-1;3)$.

Chú ý: *Ngoài cách giải ở ví dụ trên, các bạn có thể tham khảo thêm cách giải sau*:

+) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên AB, khi đó : $MH = d(M, AB) = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Ta có $\widehat{MAH} = 180^0 - \widehat{MAB} = 180^0 - 135^0 = 45^0$, suy ra tam giác MHA cân tại H, khi đó :

$$MA = \sqrt{2}MH = \sqrt{2}.\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{5}$$

+) Gọi $M(x;y)$, suy ra $AM = (x-1; y-2)$ với $\overrightarrow{AB} = (3;1)$ khi đó ta có hệ :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = 135^0 \\ MA^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3.(x-1)+(y-2)}{\sqrt{10}.\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \cos 135^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.(x-1)+(y-2) = -5 \\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 5 \end{cases}$$

+) Đặt $\begin{cases} a = x-1 \\ b = y-2 \end{cases}$, khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} 3a+b=-5 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5-3a \\ a^2+3a+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M(0;0) \\ M(-1;3) \end{array}\right.$$

+) Vậy $M(0;0)$ hoặc $M(-1;3)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có các cạnh AB và AD tiếp xúc với đường tròn (T) có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2=4$. Đường chéo AC cắt đường tròn (T) tại hai điểm M, N. Biết $M\left(-\dfrac{16}{5};\dfrac{23}{5}\right)$, trục tung chứa điểm N và không song song với AD; diện tích tam giác ADI bằng 10 và điểm A có hoành độ âm và nhỏ hơn hoành độ của D. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

***Phân tích hướng giải*:**

*) *Với dữ kiện A có hoành độ âm gợi ý ta nên đi tìm điểm A trước. Nghĩa là ta sẽ cần tìm và khai thác các dữ kiện "có lợi" cho điểm A.*

*) *Ta nhận thấy $Oy \cap (T) = \{N\} \Rightarrow$ tọa độ điểm N*

+) *Suy ra phương trình AC (đi qua hai điểm M, N biết tọa độ)*

+) *Do AB, AD tiếp xúc với đường tròn $(T) \Rightarrow AI = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$*

Như vậy ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm A theo góc nhìn của ***Bài toán 1***.

*) *Dữ kiện* $S_{ADI}=10$ *và trục tung không vuông góc* AD *gợi ý điểm tiếp theo ta đi tìm sẽ là điểm* D.

+) AD *đi qua* A *và cách* I *một khoảng* $R=2\Rightarrow$ *phương trình* AD *(sẽ được tìm hiểu kĩ ở **Bài toán 6**)*

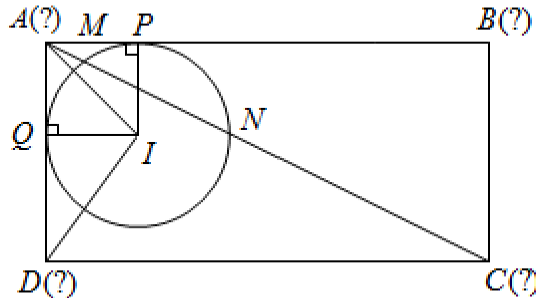
+) $AD=\dfrac{2S_{ADI}}{d(I,AD)}=10$

Như vậy điểm D *tiếp tục được "tháo" theo góc nhìn **Bài toán 1**.*

*) *Khi đã tìm được hai điểm* A,D *thì việc chỉ ra được tọa độ* C,B *là khá đơn giản.*

Sau đây là lời giải chi tiết:

Giải :



+) Đường tròn (T) có tâm $I(-2;3)$ và bán kính $R=2$.

+) Do $Oy\cap(T)=\{N\}$ nên tọa độ điểm N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x=0\\(x+2)^2+(y-3)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}\Rightarrow N(0;3)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(\frac{16}{5};-\frac{8}{5}\right)=\frac{8}{5}(2;-1)\Rightarrow\overrightarrow{n_{AC}}=(1;2)$$

Khi đó AC (đi qua M,N) có phương trình: $x+2y-6=0$

+) Gọi (T) tiếp xúc với AB,AD lần lượt tại P,Q (P,Q là các tiếp điểm)

Suy ra $APIQ$ là hình vuông nên $AI=IP\sqrt{2}=R\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

+) Gọi $A(6-2t;t)$ với $t>3$ (do $x_A>0$)

Khi đó $AI^2=8\Leftrightarrow(2t-8)^2+(t-3)^2=8\Leftrightarrow 5t^2-38t+65=0\Leftrightarrow t=5$ hoặc $t=\dfrac{13}{5}$ (loại) $\Rightarrow A(-4;5)$

+) Gọi vecto pháp tuyến của AD là $\overrightarrow{n_{AD}}=(a;b)$ với $a^2+b^2\neq 0$; $b\neq 0$ (AD không song song với Oy)

Suy ra phương trình $AD: a(x+4)+b(y-5)=0\Leftrightarrow ax+by+4a-5b=0$

$$IQ=d(I,AD)\Leftrightarrow 2=\frac{|-2a+3b+4a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow|a-b|=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 2ab=0\Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } b=0 \text{ (loại)}$$

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta được phương trình $AD: y-5=0$

+) $S_{ADI}=\dfrac{1}{2}IQ.AD\Leftrightarrow AD=\dfrac{2S_{ADI}}{IQ}=\dfrac{2.10}{2}=10$

Gọi $D(m;5)\in AD$ với $m>-4$ khi đó:

$$AD^2=100\Leftrightarrow(m+4)^2=100\Leftrightarrow m=6 \text{ hoặc } m=-14 \text{ (loại)}\Rightarrow D(6;5)$$

+) Khi đó DC đi qua $D(6;5)$ và vuông góc với AD nên có phương trình: $x-6=0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-6=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(6;0)$

+) Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} x_B+4=0 \\ y_B-5=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-4 \\ y_B=0 \end{cases} \Rightarrow B(-4;0)$

Vậy $A(-4;5), B(-4;0), C(6;0), D(6;5)$.

Nhận xét:

Qua ví dụ trên ta nhận thấy, khi xem xét một bài toán ta cần đặt ra các câu hỏi "với dữ kiện bài toán những điểm nào có thể tìm được luôn tọa độ? , những đường thẳng nào cần thiết có thể viết được ? ". Sau đó cần đặt tiếp câu hỏi " điểm nào nên tìm trước ?" . Để trả lời cho câu hỏi này thì một kinh nghiệm là những điểm đề bài cho điều kiện (như hoành độ dương, tọa độ là các số nguyên…) hoặc đang nằm trên một đường thẳng đã biết phương trình (hoặc dễ dàng viết được) cùng với các dữ kiện "có lợi" cho nó về yếu tố định lượng như diện tích, khoảng cách…

Ví dụ 10 (Khối A, A1 – 2014). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có điểm M là trung điểm của đoạn AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN=3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD, biết rằng $M(1;2)$ và $N(2;-1)$.

Phân tích hướng giải:

) Yêu cầu bài toán viết phương trình CD, giúp ta hướng tới việc gắn kết các dữ kiện để tìm các yếu tố liên quan tới đường thẳng CD. Việc bài toán cho biết tọa độ hai điểm $M(1;2)$ và $N(2;-1)$ cùng với dữ kiện $AN=3NC$, khiến ta nghĩ tới việc tìm tọa độ điểm E (với $MN \cap CD=\{E\}$). Điều này hoàn toàn có thể làm được nhờ vào **Bài toán 5.1 khi ta suy luận được $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NE}$ (các bạn sẽ được tìm hiểu ở phần sau trong **Bài toán 5.1**)*

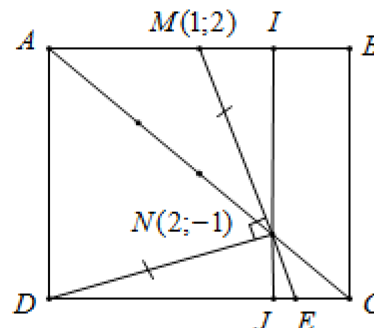
) Lúc này nếu tìm thêm được một điểm trên CD thì coi như bài toán giải quyết xong. Nhờ **Bài toán 1 ta sẽ nghĩ tới việc tìm điểm D. Cụ thể với kiến thức hình học sơ cấp ta sẽ chỉ ra được tam giác MND vuông cân tại N nên D thuộc đường thẳng ND (viết được phương trình) và cách N một khoảng không đổi MN ($DN=MN$). Như vậy bài toán đã chuyển về đúng nội dung **Bài toán 1** nên ta có lời giải sau:*

Giải:

+) Gọi $MN \cap CD=\{E\}$ và H là hình chiếu vuông góc của M trên CD. Khi đó theo Talet ta có:

$$\frac{MN}{NE}=\frac{AN}{NC}=3 \Rightarrow \overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NE} \quad (*)$$

+) Gọi $E(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{NE}=(x-2;y+1)$ và với $\overrightarrow{MN}=(1;-3)$, nên:



$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow E\left(\dfrac{7}{3};-2\right)$

+) Gọi d là đường thẳng đi qua N vuông góc với AB, cắt AB, CD lần lượt là I, J.

Khi đó $\Delta MIN = \Delta NJD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{INM} = \widehat{JDN} \Rightarrow \widehat{MND} = 90^0 \\ DN = MN \Rightarrow DN^2 = 10 \end{cases}$ **(*)**, suy ra $\overrightarrow{n_{DN}} = \overrightarrow{MN} = (1;-3)$.

Khi đó phương trình $ND: x - 3y - 5 = 0$

+) Do $D \in ND$ nên gọi $D(3t+5;t)$. Khi đó **(*)**

$\Leftrightarrow (3t+3)^2 + (t+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D(5;0) \\ D(-1;-2) \end{array}\right.$

Đường thẳng CD đi qua $E\left(\dfrac{7}{3};-2\right)$ và D nên với :

+) $D(5;0)$ suy ra CD có phương trình : $3x - 4y - 15 = 0$

+) $D(-1;-2)$ suy ra CD có phương trình : $y = -2$ hay $y + 2 = 0$

4. CÁCH RA ĐỀ 4: *Tìm điểm M gián tiếp thông qua một điểm khác thuộc **Bài toán 1** (nếu biết điểm thuộc **Bài toán 1** ta sẽ suy ra được tọa độ điểm M)*

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: 2x + y - 5 = 0$, $d_2: 2x + y = 0$. Lập phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và cắt d_1, d_2 lần lượt tại B và C sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

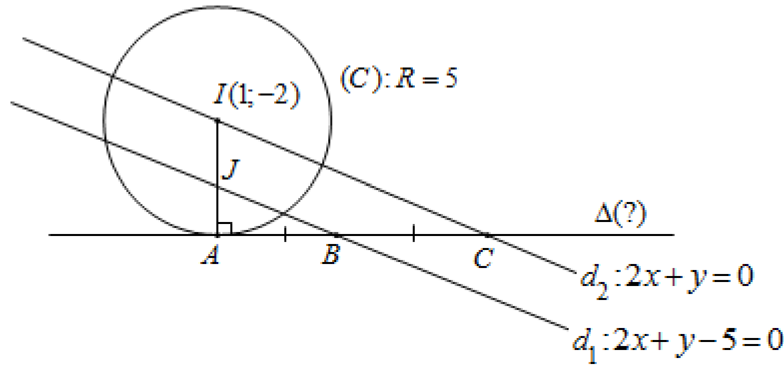
Phân tích hướng giải **:**

****)** Như cách tư duy thông thường để viết đường thẳng Δ, ta sẽ nghĩ tới việc tìm một điểm mà Δ đi qua cùng với vecto pháp tuyến hoặc chỉ phương của nó. Lúc này có ba sự lựa chọn là điểm A, B hoặc C. Song cả ba điểm trên đều chưa biết tọa độ. Vậy câu hỏi lúc này là nên tìm tọa độ điểm nào ? Ta nhận thấy hai điểm B, C có lợi thế là đều đang thuộc các đường thẳng đã biết phương trình, nhưng gần như đó là dữ kiện có lợi duy nhất cho B và C. Nghĩa là việc tìm tọa độ B, C là gặp "khó khăn". Chỉ còn một sự lựa chọn là điểm A. Có vẻ hợp lí , vì nếu tìm được tọa độ điểm A, ta sẽ tìm được vecto pháp tuyến của Δ là $\overrightarrow{IA}$ và suy ra phương trình Δ. Thế tìm điểm A bằng cách nào ? Với dữ kiện bài toán ta chỉ có được $IA = R = 5$. Vậy việc tìm điểm A trực tiếp lúc này lại gặp trở ngại. Khi đứng trước những tình huống bí bách kiểu này, một kinh nghiệm là ta hãy chú ý tới những thông số, dữ kiện của đề bài và rất có thể trong đó đang ẩn chứa những yếu tố đặc biệt sẽ giúp ta tháo gỡ được "nút thắt" của bài toán. Nhận thấy, có hai yếu tố về số liệu khá đặc biệt là tâm I của (C) thuộc d_2 và $d_1 // d_2$. Nghĩa là JB là đường trung bình trong tam giác IAC với $d_1 \cap IA = \{J\}$, suy ra J*

là trung điểm của IA. Nếu tìm được tọa độ điểm J ta sẽ suy ra tọa độ điểm A và viết được phương trình Δ. Vậy thay vì đi tìm A ta sẽ tìm gián tiếp thông qua điểm J.

) Ta nhận thấy : $J \in d_1$ và $JI = \frac{IA}{2} = \frac{R}{2}$. Như vậy lúc này đã "lộ diện" **Bài toán 1, có nghĩa là ta sẽ tìm được tọa độ điểm J nhờ **Bài toán 1**.*

Giải :



+) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ thuộc d_2 và bán kính $R = 5$. Gọi $d_1 \cap IA = \{J\}$.

Do $d_1 // d_2$ nên JB là đường trung bình trong tam giác IAC, suy ra J là trung điểm của IA.

+) Gọi $J(t;5-2t) \in d_1$, khi đó : $JI = \frac{IA}{2} = \frac{R}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow JI^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow (t-1)^2 + (2t-7)^2 = \frac{25}{4}$

$$\Leftrightarrow 4(5t^2 - 30t + 50) = 25 \Leftrightarrow 4t^2 - 24t + 35 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \text{ hoặc } t = \frac{7}{2}$$

Do J là trung điểm của IA nên :

+) Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow J\left(\frac{5}{2};0\right) \Rightarrow A(4;2)$, khi đó Δ đi qua $A(4;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (3;4)$

nên có phương trình : $3(x-4) + 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 20 = 0$.

+) Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow J\left(\frac{7}{2};-2\right) \Rightarrow A(6;-2)$, khi đó Δ đi qua $A(6;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (5;0)$

nên có phương trình : $5(x-4) + 0.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy Δ có phương trình : $3x + 4y - 20 = 0$ hoặc $x = 4$.

Nhận xét :

Ví dụ trên là kiểu bài toán không mẫu mực, nghĩa là với các cách tư duy thông thường (chưa để ý tới những số liệu cụ thể) ta khó có thể đưa ra được lời giải cho nó. Khi đó giải pháp cho những lớp bài toán trên là khai thác triệt để số liệu đặc biệt của đề bài, và chính số liệu này mới là "chìa khóa" giúp ta đi đến đáp số của bài toán. Các bạn sẽ tiếp tục tìm hiểu các lớp bài toán này qua các ví dụ tiếp theo.

Chú ý :

*Ngoài cách giải theo góc nhìn của **Bài toán 1** ở trên, các bạn có tìm trực tiếp điểm A bằng cách sau :*

+) Do $d_1 // d_2$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng này bằng 5.

Do đó A sẽ thuộc đường thẳng d song song với d_1 và cách d_1 một khoảng bằng 5.

Suy ra đường thẳng $d: 2x+y-10=0$ hoặc $d: 2x+y=0$ (loại vì $d \equiv d_2$)

+) Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x+y-10=0 \\ x^2+y^2-2x+4y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;2) \\ A(6;-2) \end{array}\right.$

Ví dụ 2 (A – 2010 – CB). Cho hai đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x+y=0$ và $d_2: \sqrt{3}x-y=0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Phân tích hướng giải :

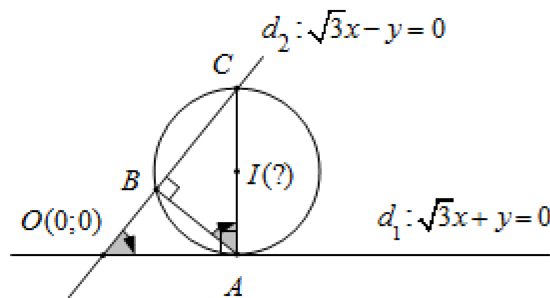
*) *Như ta đã biết để viết phương trình của một đường tròn ta luôn cần hai yếu tố là tọa độ tâm và bán kính. Song với bài toán này nếu xác định được tọa độ tâm I của (T) thì ta sẽ tính được bán kính vì $R=d(I,d_1)$ và suy ra được phương trình (T). Vậy tìm I như thế nào ? I thuộc AC song chưa biết phương trình. Như vậy việc tìm tìm trực tiếp điểm I là không khả thi. Lúc này ta sẽ nghĩ tới việc tìm điểm I gián tiếp thông qua các điểm có mối liên hệ với nó. Với dữ kiện ABC vuông tại B , suy ra AC là đường kính (I là trung điểm của AC). Vì vậy nếu biết tọa độ điểm A ta sẽ tìm được tọa độ điểm C (Vì khi đó ta viết được phương trình AC và $d_2 \cap AC = \{C\}$), từ đó ta suy ra được tọa độ điểm I .*

*) *Xác định tọa độ điểm A nhờ **Bài toán 1.** Cụ thể:*

+) $A \in d_1: \sqrt{3}x+y=0$.

+) *Có $d_1 \cap d_2 = \{O\}$ với $O(0;0)$ và khai thác dữ kiện $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ để tính $OA=?$*

Giải :



+) Xét hệ : $\begin{cases} \sqrt{3}x+y=0 \\ \sqrt{3}x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O(0;0)$ là giao điểm của d_1 và d_2.

Véc tơ pháp tuyến của d_1, d_2 lần lượt là : $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3};1)$, $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{3};-1)$, suy ra :

$$\cos(d_1,d_2)=\frac{\left|\sqrt{3}.\sqrt{3}+1.(-1)\right|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$$

Mặt khác tam giác ABC vuông tại B, do đó $\angle AOB=60^0 \Rightarrow \angle BAC=60^0$.

+) Xét tam giác AOB và AOC ta có: $\begin{cases} AB=OA\sin 60^0=\dfrac{OA\sqrt{3}}{2} \\ AC=OA\tan 60^0=OA\sqrt{3} \end{cases}$

Khi đó $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin 60^0=\frac{1}{2}.\frac{OA\sqrt{3}}{2}.OA\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}OA^2$.

Do đó $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

+) Gọi $A(t;-\sqrt{3}t)$ với $t>0$, khi đó:

$OA=\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow OA^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow t^2+3t^2=\frac{4}{3}\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ hoặc $t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (loại) $\Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$

Suy raa AC qua A, vuông góc d_1 có phương trình: $\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{3}\left(y+1\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{3}x-3y-4=0$

Khi đó tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\sqrt{3}x-3y-4=0\\ \sqrt{3}x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10}{\sqrt{3}}\\ y=-2\end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}};-2\right)$$

+) Vì tam giác ABC vuông tại B nên AC là đường kính.

Do đó đường tròn (T) cần viết có:

Tâm $I\left(\frac{-1}{2\sqrt{3}};-\frac{3}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}{2}=1$

Suy ra phương trình đường tròn (T): $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$.

Ví dụ 3 (B – 2011 – NC). Cho tam giác ABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại các điểm D,E,F. Cho $D(3;1)$ và đường thẳng EF có phương trình $y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Phân tích hướng giải:

Ta nhận thấy A đang nằm trên các đường AB,AD,AC. Như vậy lúc này việc tìm điểm A có thể đi theo những hướng sau: "Hướng 1: nếu viết được phương trình của một trong 3 đường trên và tính được độ dài đoạn

*AB (hoặc AD) thì ta sẽ chuyển nó về **Bài toán 1**" hoặc "Hướng 2: nếu biết được phương trình của hai trong 3 đường trên ta cũng suy ra được tọa độ điểm A". Để chọn hướng đi thích hợp ta cần khai thác các dữ kiện của bài toán. Với các số liệu của bài toán cho ta thấy Hướng 1 có vẻ không mấy khả thi, vì việc tính được độ dài AB (hoặc AD) sẽ gặp trở ngại. Lúc này ta nghĩ tới giải pháp thứ 2. Điểm B và D đều đã biết tọa độ nên ta sẽ nghĩ tới việc viết phương trình AB và AD. Ta sẽ phân tích chi tiết số liệu bài toán:* $\begin{cases} B\left(\frac{1}{2};1\right) \\ D(3;1) \end{cases} \Rightarrow$ *phương trình BD: $y=1$ song song với đường thẳng $EF: y-3=0$. Khi đó ta sẽ chứng minh được tam giác ABC cân tại A. Do đó $AD \perp BC$. Như vậy ta viết được phương trình AD. Lúc này việc việc viết phương trình AB sẽ cần sự "trợ giúp" của điểm F. Và ta nhận thấy **Bài toán 1** sẽ cho ta được tọa độ điểm F. Cụ thể:* ***)** $F \in EF: y-3=0$ ***)** $FB = BD = \frac{5}{2}$

Sau đây là lời giải chi tiết của bài toán.

Giải:

+) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Khi đó $\begin{cases} ID \perp BC \\ IA \perp EF \end{cases}$ (1). Với $\begin{cases} B\left(\frac{1}{2};1\right) \\ D(3;1) \end{cases} \Rightarrow$ phương trình BD: $y=1$, suy ra $BD // EF$ hay $BC // EF$ (2)

(vì phương trình $EF: y-3=0$)

Từ (1) và (2) suy ra A, I, D thẳng hàng hay $AD \perp BC$, nên phương trình AD là: $x=3$

+) Gọi $F(t;3) \in EF$, khi đó theo tính chất tiếp tuyến ta có:

$$BF = BD \Leftrightarrow BF^2 = BD^2 \Leftrightarrow \left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} F(-1;3) \\ F(2;3) \end{array}\right.$$

+) Với $F(-1;3) \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{3}{2};2\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BF}} = (4;3)$, khi đó phương trình BF là:

$$4(x+1)+3(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$$

Do $BF \cap AD = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{7}{3}<0 \end{cases}$ (loại)

+) Với $F(2;3) \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \left(\frac{3}{2};2\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BF}} = (4;-3)$, khi đó phương trình BF là:

$$4(x-2)-3(y-3)=0 \Leftrightarrow 4x-3y+1=0$$

Do $BF \cap AD = \{A\}$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x-3y+1=0 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(3;\frac{13}{3}\right)$

Vậy $A\left(3;\frac{13}{3}\right)$

***Bình luận sau Bài Toán 1*:**

Như vậy trong các đề thi Quốc Gia, nhiệm vụ của người ra đề là sẽ làm "mờ" bài toán gốc của chúng ta , bằng các dữ kiện và số liệu đi kèm . Nhiệm vụ của các bạn là dùng các kiến thức cơ bản để cắt nghĩa bài toán, làm cho bài toán gốc "hiện nguyên hình" . Qua ***Bài Toán 1*** *các bạn thấy phần nào tầm "sát thương" và tính hiệu quả của nó trong việc giải quyết các bài toán tìm điểm và các bài toán liên quan khác…Nó giúp các bạn biết cách đặt ra các câu hỏi hướng vào các đối tượng và dữ kiện của đề bài mà ta đang cần và có được định hướng để tư duy và tháo gỡ bài toán. Nếu biết cách "làm chủ"* ***Bài toán 1*** *có nghĩa là các bạn đang có trong tay một công cụ đơn giản nhưng khá hiệu quả và việc đưa ra đáp số chính xác cho các bài toán không có gì khó khăn với các bạn. Chúng ta còn khá nhiều công cụ hữu hiệu khác. Các bạn sẽ tiếp tục đi tìm hiểu thông qua 9 bài toán tiếp theo.*

Trên đây là đoạn trích từ bản thảo của cuốn sách:

10 BÀI TOÁN TRỌNG ĐIỂM

TƯ DUY ĐỘT PHÁ – CHÌA KHÓA GIẢI NHANH

HÌNH HỌC PHẲNG OXY

Mọi thông tin chi tiết các bạn có thể tham khảo qua:

Web: http://www.toanmath.com/

CẢM ƠN CÁC BẠN ĐÃ QUAN TÂM !